बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल ...

शेखावाटी मिशन : 100

गणित (कक्षा : 10)

Mathematics (Class : 10th)

पढ़ेगा राजस्थान

बढ़ेगा राजस्थान

कार्यालय : संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

संयोजक कार्यालय - संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

शेखावाटी मिशन – 100 मार्गदर्शक

पितराम सिंह
संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चूरू संभाग, चूरू

महेन्द्र सिंह बड़सरा
सहायक निदेशक
संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

संकलनकर्त्ता टीम – गणित

जितेन्द्र बगड़िया
(विषय संयोजक, मो. 9950464643)
रा.उ.मा.वि. भूमा छोटा, सीकर

राकेश कुमार पूनियां
रा.उ.मा.वि. रोसावां, फतेहपुर

महेश कुमार चाहिल
रा.उ.मा.वि. रेटा, पलसाना

सुमन
रा.उ.मा.वि. पुरा बड़ी, धोद

महेश कुमार
रा.उ.मा.वि. कोछोर

प्रगति चौधरी
रा.उ.मा.वि. पायली, रतनगढ़

सुभाष चंद्र सियाग
रा.उ.मा.वि. खुडेरा बड़ा, रतनगढ़

विकास कुमार
श.ह.रा.उ.मा.वि. ठिमोली, फतेहपुर

रामलाल सिलू
रा.उ.मा.वि. खारिया बड़ा, सुजानगढ़

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, संयुक्त निदेशक कार्यालय – चूरू संभाग, चूरू (राजस्थान)

प्रश्न–पत्र की योजना

कक्षा – **10**
विषय – गणित 09
अवधि – 3 घण्टे 15 मिनट पूर्णांक – 80

1. उद्देश्य हेतु अंकभार –

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	20	25.00
2.	अवबोध	16	20.00
3.	अभिव्यक्ति	24	30.00
4.	मौलिकता	20	25.00
योग		80	100 %

2. प्रश्नों के प्रकारवार अंकभार –

क्र. सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रति प्रश्न	कुल अंक प्रतिशत	प्रतिशत प्रश्नों का	संभावित समय
1.	वस्तुनिष्ठ	18	1	22.50	36.00	45
2.	अतिलघूत्तरात्मक	12	1	15.00	24.00	35
3.	लघूत्तरात्मक	13	2	32.50	26.00	45
4.	दीर्घउत्तरीय प्रश्न	04	3	15.00	08.00	35
5.	निबंधात्मक	03	4	15.00	06.00	35
	योग	50		100	100	195

3. विषय वस्तु का अंकभार –

क्र.सं.	विषय वस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1	वास्तविक संख्याएँ	4	05.00
2	बहुपद	3	03.75
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	6	07.50
4	द्विघात समीकरण	4	05.00
5	समांतर श्रेढीया	5	06.25
6	त्रिभुज	4	05.00
7	निर्देशांक ज्यामति	6	07.50
8	त्रिकोणमिति का परिचय	8	10.00
9	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	4	05.00
10	वृत्त	5	06.25
11	रचनाएँ	6	07.50
12	वृत्तो से संबंधित क्षेत्रफल	4	05.00
13	प्रष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	6	07.50
14	सांख्यिकी	11	13.75
15	प्रायिकता	4	05.00

प्रश्न–पत्र ब्ल्यू प्रिन्ट

कक्षा – 10 विषय :– गणित 09 पूर्णांक – 80

क्र. सं.	उद्देश्य इकाई/उप इकाई	ज्ञान					अवबोध					ज्ञानोपयोग/अभिव्यक्ति					कौशल/मौलिकता					योग
		वस्तुनिष्ठ	अति.लघु	लघु उत्तरात्मक	दीर्घउत्तरीय	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति.लघु	लघु उत्तरात्मक	दीर्घउत्तरीय	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति.लघु	लघु उत्तरात्मक	दीर्घउत्तरीय	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति.लघु	लघु उत्तरात्मक	दीर्घउत्तरीय	निबन्धात्मक	
1	वास्तविक संख्याएँ	1(1)		2(1)													1(1)					4(4)
2	बहुपद	1(1)							2(1)													3(2)
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म					4(1)	1(1)	1(1)														6(3)
4	द्विघात समीकरण			2(1)			1(1)	1(1)														4(3)
5	समांतर श्रेढीया				3(1)							1(1)	1(1)									5(3)
6	त्रिभुज											1(1)	1(1)	2(1)								4(3)
7	निर्देशांक ज्यामति	1(1)							2(1)	3(1)												6(3)
8	त्रिकोणमिति का परिचय		1(2)													4(1)	1(2)					8(5)
9	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग												1(1)					1(1)	2(1)			4(3)
10	वृत्त						1(1)	1(1)												3(1)		5(3)
11	रचनाएँ						1(1)											1(1)	2(2)			6(4)
12	वृत्तो से संबंधित क्षेत्रफल			2(1)								1(1)						1(1)				4(3)
13	प्रष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन											1(2)		2(2)								6(3)
14	सांख्यिकी	1(2)												2(1)	3(1)						4(1)	11(5)
15	प्रायिकता								2(1)				1(1)				1(1)					4(3)
		5(5)	2(2)	6(3)	3(1)	4(1)	4(4)	3(3)	6(3)	3(1)		5(5)	4(4)	8(4)	3(1)	4(1)	4(4)	3(3)	6(3)	3(1)	4(1)	80(50)

विकल्पों की योजना :– प्र.सं. 21, 22, 23 में एक आंतरिक विकल्प है। नोटः– कोष्ठक में बाहर की संख्या अंकों की तथा भीतर प्रश्नों की द्योतक है।

हस्ताक्षर

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान, अजमेर
माध्यमिक परीक्षा – 2023
मॉडल प्रश्न पत्र

विषय–गणित
कक्षा–10

समय– 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक–80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

Genral Instruction to the Examinees :

I. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्नपत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।

Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.

II. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।

All the questions are compulsory.

III. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तरपुस्तिका में ही लिखें।

Write the answer to each question in the given answer book only.

IV. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।

For questions having more than one part the answers to those parts are to be written together in continuity.

V. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि / अंतर / विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।

If there is any error/difference/contradiction in Hindi & English versions of the question paper, the question of Hindi version should be treated valid.

टेलीग्राम चैनल ज्वाइन करें

खण्ड–अ
SECTION- A

1. **(i)** 12 और 15 का लसप और मसप क्या होगा ?

(अ) 60 और 3 (ब) 24 और 6

(स) 12 और 30 (द) इनमें से कोई नहीं 1

Find the LCM and HCF of 12 and 15 ?

(a) 60 and 3 (b) 24 and 6

(c) 12 and 30 (d) None of these

(ii) बहुपद में $3x^2 + 4x - 2$ शून्यकों की संख्या होगी ?

(अ) 1 (ब) 2

(स) 0 (द) इनमें से कोई नहीं 1

Numbers of zeroes in polynomial $3x^2 + 4x - 2$ is ?

(a) 1 (b) 2

(c) 0 (d) None of these

(iii) मूल बिन्दु के निर्देशांक होते है ?

(अ) (1, 2) (ब) (1, 1)

(स) (-1, 1) (द) (0, 0) 1

The Coordinates of origin are ?

(a) (1, 2) (b) (1, 1)

(c) (-1, 1) (d) (0, 0)

(iv) यदि $2x + y = 6$ हो तो इसको सन्तुष्ट करने वाला युग्म है ?

(अ) (1, 2) (ब) (2, 1)

(स) (2, 2) (द) (1, 1) 1

Which pair is satisfy the lines equation $2x + y = 6$?

(a) (1, 2) (b) (2, 1)

(c) (2, 2) (d) (1, 1)

(v) समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ के मूल वास्तविक नहीं होंगे यदि

(अ) $b^2 - 4ac < 0$ (ब) $b^2 - 4ac > 0$

(स) $b^2 - 4ac = 0$ (द) इनमें से कोई नहीं 1

In which condition the roots are not real in Quadratic equation

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

(a) $b^2 - 4ac < 0$ (b) $b^2 - 4ac > 0$

(c) $b^2 - 4ac = 0$ (d) None of these

(vi) एक समान्तर श्रेढ़ी 3, 7, 11, 15 .... के लिए सार्वअन्तर होगा ?

(अ) 1 (ब) 2

(स) 3 (द) 4 1

The common difference for and A.P. 3, 7, 11, 15 .... will be

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

(vii) $2 \sin 45^0 \cos 45^0$ का मान होगा ?

(अ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ब) 2

(स) 1 (द) 0 1

The value of $2 \sin 45^0 \cos 45^0$ will be ?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 2

(c) 1 (d) 0

(viii) एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएं हो सकती है ?

(अ) एक (ब) अनन्त

(स) तीन (द) ज्ञात नहीं 1

How many tangents can a circle have ?

(a) One (b) Infinite

(c) Three (d) Unknown

(ix) वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र है ?

(अ) $2\pi r$ (ब) $\frac{\pi r^2}{180}$

(स) πr^2 (द) इनमें से कोई नहीं 1

Which one of the formula to find area of circle ?

(a) $2\pi r$ (b) $\frac{\pi r^2}{180}$

(c) πr^2 (d) None of these

(x) यदि एक बेलन की ऊंचाई 11 सेमी तथा उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 सेमी^{2} है तो बेलन की त्रिज्या होगी ?

(अ) 10 सेमी (ब) 11 सेमी

(स) 12 सेमी (द) 14 सेमी **1**

If a height of a cylinder is 11 cm and its curved surface area is 968 cm^2, then the radies of cylinder will be ?

(a) 10 cm (b) 11 cm

(c) 12 cm (d) 14 cm

(xi) बंटन 7, 4, 5, 3, 4, 3, 4, 1, 2 का बहुलक होगा—

(अ) 7 (ब) 4

(स) 3 (द) 2 **1**

Mode of the distribution 7, 4, 5, 3, 4, 3, 4, 1, 2 is—

(a) 7 (b) 4

(c) 3 (d) 2

(xii) एक पासे को एक बार फेंका जाता है। अभाज्य संख्या को प्राप्त करने की प्रायिकता है—

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{2}{3}$

(स) 0 (द) 1 **1**

A die is thrown once, then the probability of getting a prime number is—

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) 0 (d) 1

2. **(i)** $3+2\sqrt{5}$ एक .... संख्या हैं? (परिमेय / अपरिमेय) **1**

$3+2\sqrt{5}$ is a .... number ? (Rational / Irrational)

(ii) सभी वृत्त .... होते हैं ? (सर्वागसम / वृत्त) 1

All circles are .... (Congruent / Similar)

(iii) $\tan 30^0 \tan 60^0$ का मान .... होगा ? 1

Value of $\tan 30^0 \tan 60^0$ is .... ?

(iv) वृत्त की स्पर्श रेखा और त्रिज्या के बीच .... का कोण बनता है ? (न्यून कोण / अधिक कोण / समकोण) 1

Angle between a tangent and a radies of circle is .... (Acute angle / Obtuse angle /Right angle)

(v) वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य ज्ञात करने का सूत्र $\overline{x} =$............. है ? 1

Formule of finding mean of a grouped data is $\overline{x} =$.............

(vi) किसी असम्भव घटना के होने की प्रायिकता .... होती है। 1

The probability of an impossible event is................. .

3. **(i)** दो चर वाले समीकरण निकाय का हल अद्वितीय होने की शर्त लिखिए। 1

Find the condition of unique solution for pair of linear equation in two variables.

(ii) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल ज्ञात करने का श्री धराचार्य सूत्र लिखिए ? 1

Write the Shree Dharacharya formula to find roots of quadratic equation

$ax^2 + bx + c = 0$.

(iii) समान्तर श्रेढ़ी 2, 5, 8, 11 .... के 12 पदों का योग ज्ञात करो ? 1

Find the sum of A.P. 2, 5, 8, 11 .... to (12^{th} term)

(iv) दो समरूप त्रिभुजों की भुजाओं का अनुपात 4 : 9 हो तो इन दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए। 1

If ratio of sides of two similar triangles is 4 : 9 , the find the ratio of areas of these two triangles.

(v) $\dfrac{\sec 40^0}{\operatorname{cosec} 50^0} - \dfrac{\sec 50^0}{\operatorname{cosec} 40^0}$ का मान ज्ञात कीजिए ? **1**

Find the value of $\dfrac{\sec 40^0}{\operatorname{cosec} 50^0} - \dfrac{\sec 50^0}{\operatorname{cosec} 40^0}$.

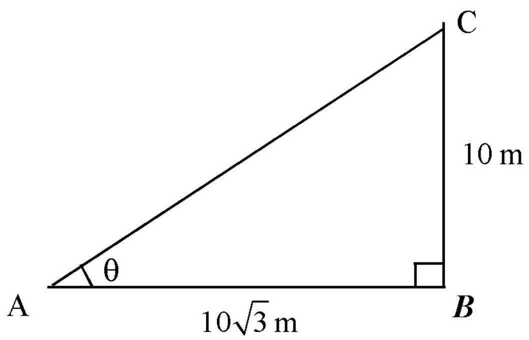
(vi) $9\sec^2\theta - 9\tan^2\theta$ का मान ज्ञात करो ? **1**

Find the value of $9\sec^2\theta - 9\tan^2\theta$

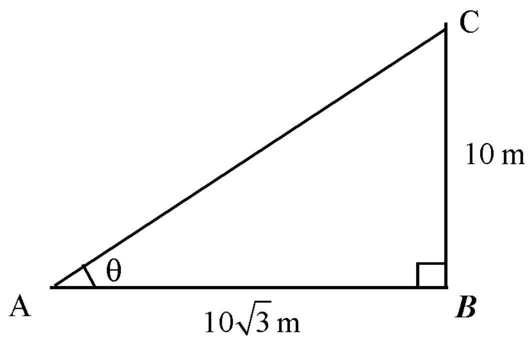
(vii) एक समय एक मीनार की छाया उसकी ऊंचाई के बराबर हो जाती है, तो उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए ? **1**

At a time, the shadow of a tower is equal to height of tower. Find the angle of elevation ?

(viii) दी गई आकृति में कोण θ का मान ज्ञात कीजिए ? **1**



Find the value of angle θ in given figure ?



(ix) यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएं परस्पर 80^0 के कोण पर झुकी हो तो $\angle AOB$ का मान ज्ञात करो ? **1**

If tangent PA and PB from a point P to a circle with centre O are inclined to each other at the angle of 80^0. Then find $\angle AOB$.

(x) 19 सेमी लम्बा एक रेखाखण्ड खीचिए और इसे 2 : 1 के अनुपात में विभाजित कीजिए ? दोनों भाग की माप लिखो। **1**

Draw a line segment of a length 9 cm and divide into the ratio 2 : 1 mesure the two parts.

(xi) 6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60^0 है ? **1**

Find the area of a sector of a circle with redius 6 cm, if angle of the sector is 60^0.

(xii) एक बक्से में 3 नीली, 2 सफेद और 4 लाल गेंद है। इस बक्से में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई गेंद नीली है ? **1**

A box contains 3 blue, 2 white and 4 red ball. If a box is draw at random from box, what is the probability that will be blue ball ?

खण्ड—ब

SECTION-B

4. दो संख्याओं 616 और 32 का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए। **2**

   Find the HCF of two numbers 616 and 32.

5. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यक 4 तथा 1 है ? **2**

   Find a guadratic polynomial, whose zeroes 4 and 1 ?

6. द्विघात समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ के सूत्र ज्ञात कीजिए ? **2**

   Find a roots of guadratic equation $6x^2 - x - 2 = 0$?

7. बिन्दुओं (1, –5) और (–4, 5) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को –अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है, ज्ञात कीजिए ? **2**

Find the ratio, in which x-axis divides the line segment joining the points (1, -5) and (-4, 5). **2**

8. भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिन्दु से बाँध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढाल नहीं है, डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए। **2**

A kite is flying at a height of 60 m above the ground. The string attached to the kite is temporarily tied to a point on the ground. The inclination of the string with the ground is 60°. Find the length of the string, assuming that there is no slack in the string.

9. 6.7 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड खींचकर उसका 2 : 3 में आन्तरिक विभाजन कीजिए ? **2**

Draw a line segment of length 6.7 cm and divide it into 2 : 3 internally ?

10. 5 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएं खींचिए, जो परस्पर के 60^0 कोण पर झुकी हो। **2**

Draw a pair of tangents to a circle of radius 5 cm, which are inclined to each other at angle of 60^0.

11. यदि दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हो तो सिद्व कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वागसम होते है ? **2**

If that area of two similar triangles are equal, prove that they are congrunt.

12. एक घड़ी के मिनट की सुई जिसकी लम्बाई 14 सेमी है। इस सुई के द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ? **2**

The length of the minute hand of a clock is 14 cm. Find the area swept by the minute hand in 5 minutes ?

13. त्रिज्या 4.2 सेमी वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 सेमी वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊंचाई ज्ञात कीजिए ? **2**

A metalic sphere of radius 4.2 cm is melted and recast into the shape of a cylinder of radius 6 cm. Find the height of the cylinder ?

14. विमाओं $5.5\,cm \times 10\,cm \times 3.5\,cm$ वाला एक घनाभ बनाने के लिए 1.75 सेमी व्यास 2 एमएम मोटाई वाले कितने चांदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा ? **2**

How many silver coins 1.75 cm is diameter and of thickness 2 mm, must be melted to form a cuboid of dimensions $5.5\,cm \times 10\,cm \times 3.5\,cm$?

15. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए ?

x	20	30	40	50	60	70	80
f	6	11	7	4	4	2	1

Find the mean of the following frequency distribution ?

x	20	30	40	50	60	70	80
f	6	11	7	4	4	2	1

16. दो खिलाड़ी A और B टेनिस का एक मैच खेलते है। यह ज्ञात है कि A के मैच जीतने की प्रायिकता 0.38 है। B के मैच जीतने की क्या प्रायिकता है ? **2**

Two Players A and B play a tennis match. It is known that the probability of a winning the maths is 0.38. What is the probability of B winning the match ?

खण्ड–स
SECTION- C

17. A.P. : 17, 15, 13,...............के कितने पद लिए जाएँ ताकि उनका योग 81 हो? **3**

How many terms of the A.P. : 17, 15, 13,..............must be taken, so that their sum is 81?

18. सिद्व कीजिए कि बिन्दु (2, –2) , (–2, 1) तथा (5, 2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है। **3**

Prove that the point (2, -2) , (-2, 1) and (5, 2) are vertices of a right angled triangle.

19. निम्नलिखित वर्गीकृत आंकड़ों का कल्पित माध्य विधि द्वारा माध्य ज्ञात कीजिए ?

वर्ग	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
बारम्बारता	7	6	9	13	20	5	4

3

Find the mean of the following grouped data using the assumed mean method.

Class	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
Frequency	7	6	9	13	20	5	4

3

20. सिद्व कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएं समान्तर होती हैं? **3**

Prove that the tangents drawn at the ends of a diameter of a circle are parallel.

खण्ड–द

SECTION- D

21. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए ?

$2x + y = 6$; $2x - 3y = 2$

अथवा

निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए ?

$x + 3y = 6$; $2x - 3y = 12$ **4**

Solve the following pair of linear equations by graphical method :

$2x + y = 6$; $2x - 3y = 2$

Or

Solve the following pair of linear equations by graphical method :

$x + 3y = 6$; $2x - 3y = 12$

22. सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$$ **4**

Prove that

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$$

Or

Prove that

$$\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$$

23. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ग में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है—

आयु (वर्षों में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपर्युक्त आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। **4**

अथवा

निम्नलिखित बारम्बारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65 – 85	4
85 – 105	5
105 – 125	13
125 – 145	20
145 – 165	14
165 – 185	8
185 – 205	4

The following table shows the ages of the patients admitted in a hospital during a year :

Age (in years)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
No. of Patients	6	11	21	23	14	5

Find the mode and the mean of the data given above.

Or

The following frequency distribution gives the monthly consumption of electricity of 68 consumers of a locality. Find the median, and mode of the data.

Monthly Consumption (in units)	Number of Consumers
65 – 85	4
85 – 105	5
105 – 125	13
125 – 145	20
145 – 165	14
165 – 185	8
185 – 205	4

अध्याय–1
वास्तविक संख्या
अंक(प्रश्न) $1(1)+1(1)+2(1)=4(3)$

* परिमेय संख्या – ऐसी संख्याएं जिनको $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सके। जहां p,q पूर्णांक संख्या है तथा $q\neq 0$, परिमेय संख्या कहलाती है।

उदा. $\frac{-4}{3},\sqrt{625},\frac{4\sqrt{2}}{7\sqrt{2}},(3+\sqrt{23})-\sqrt{23},\frac{1}{-3},\frac{-2}{-3}$ आदि।

* अपरिमेय संख्या– ऐसी संख्याएं जिनको $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सके। अपरिमेय संख्या कहलाती है।

उदा. $\sqrt{2},\sqrt{3},\pi,\frac{1}{\sqrt{2}},2-\sqrt{5}$ आदि।

महत्वपूर्ण तथ्य–
1. एक परिमेय संख्या व एक अपरिमेय संख्या का योग करने या घटाने पर एक अपरिमेय संख्या प्राप्त होती है।
2. एक शुन्येत्तर परिमेय संख्या व एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल व भाग करने पर एक अपरिमेय संख्या बनती है।
3. यदि दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़े, घटाये, भाग दे या गुणा करने पर परिमेय या अपरिमेय संख्या दोनों में से कुछ भी आ सकता है।

* यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका– दो धनात्मक पूर्णांक a व b दिए होने पर ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएं q व r विद्यमान है कि $a=bq+r$ जहां $0\leq r<1$

*. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम (कलन विधि) इसी प्रमेयिका पर आधारित है। जिससे दो धनात्मक पूर्णांकों का HCF ज्ञात किया जाता है।

उदा. 4052 व 12576 का HCF युक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

हलः यहां $12576>4052$ तो यूक्लिड प्रमेय से
$12576=4052\times 3+420$
$4052=420\times 9+272$
$420=272\times 1+148$
$272=148\times 1+124$
$148=124\times 1+24$
$124=24\times 5+4$
$24=4\times 6+0$
यहां शेषफल 0 प्राप्त होता है तथा भाजक 4 है तो $HCF=4$ होगा।

* अंकगणित की आधारभूत प्रमेय– प्रत्येक भाज्य संख्या का अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। तथा यह गुणनखण्ड, अभाज्य गुणनखण्डों के आने के क्रम के बिना अद्वितीय होते है।

* दो धनात्मक पूर्णांकों के LCM व HCF अंकगणित को आधारभूत प्रमेय या अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात किया जाता है।

* दो धनात्मक पूर्णांक a व b के लिए
$LCM(a,b)\times HCF(a,b)=a\times b$ होता है।
अर्थात् दो संख्याओं का गुणनफल, उनके LCM (ल.स.) व HCF (म.स.) के गुणनफल के बराबर होता है।

उदा. दो संख्याओं 90 व 144 का $LCM=720$ हो तो HCF ज्ञात कीजिए।

हलः दो संख्याओं के LCM व HCF में निम्न संबंध होता है–
संख्याओं का गुणनफल $=LCM\times HCF$
$90\times 144=720\times HCF$
$HCF=\frac{90\times 144}{720}$
$HCF=18$

उदा. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से 144, 180, 108 का LCM व HCF ज्ञात कीजिए।

हलः $144=2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3$
$=2^2\times 3^2$
$180=2\times 2\times 3\times 3\times 3$
$=2^2\times 3^3$
$108=2\times 2\times 3\times 3\times 5$
$=2^2\times 3^2\times 5^1$
$LCM(144,180,108)=2^2\times 3^2\times 2\times 2\times 3\times 5$
$=4\times 9\times 4\times 15$
$=2160$
$HCF(144,180,108)=2^2\times 3^2$
$=4\times 9$
$=36$

दशमलव प्रसार–

1. एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ जहां p,q सह अभाज्य संख्या है। का दशमलव प्रसार सात होगा यदि $q,2^n\times 5^m$ के रूप का हो। जहां n,m एक पूर्णसंख्या है।

उदा. $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार क्या कीजिए।

हलः $\frac{17}{2\times2\times2}=\frac{17}{2^3}$

$=\frac{17}{2^3\times5^0}$ जहां $5^0=1$

अतः परिमेय संख्या $\frac{17}{8}$ का हर $2^n\times5^m$ के रूप का है।

अतः दशमलव प्रसार सांत है।

2. एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ जहां p,q सहअभाज्य संख्या है का दशमलव प्रसार असांत होगा यदि q के अभाज्य गुणनखण्ड $2^n\times5^m$ के रूप का न हो।

उदा. परिमेय संख्या $\frac{23}{2^3 5^2 7^2}$ का दशमलव प्रसार क्या होगा।

हलः परिमेय संख्या $=\frac{23}{2^3 5^2 7^2}$

इस परिमेय संख्या में $q,2^n\times5^m$ के रूप का नहीं है।

अतः दशमलव प्रसार असांत होगा।

* परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवृती होता है, अनवसानी आवृती से तात्पर्य है कि दशमलव के बाद अंकों की लगातार पुनरावृती हो।

उदा. 1.33......,1.254254......, $25.\overline{04}$ आदि।

* अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावृती होता है। अनवसानी अनावृती से तात्पर्य है कि दशमलव के बाद अंकों की पुनरावृती न हो।

उदा. 0.120120012000..., $\sqrt{2}=1.41421...$, $\sqrt{3}=1.7320...$ आदि।

महत्वपूर्ण प्रश्न

1. निम्नलिखित में से कौनसी अपरिमेय संख्या नहीं है–

(1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{24}$

(3) $\sqrt{35}$ (4) $\sqrt{121}$ **(4)**

2. $3.\overline{27}$ है–

(1) पूर्णांक संख्या

(2) परिमेय संख्या

(3) अपरिमेय संख्या

(4) प्राकृत संख्या **(2)**

3. किसी पूर्णांक m के लिए सम संख्या का रूप है–

(1) $m+2$

(2) $2m+1$

(3) $2m-1$

(4) $2m$

4. $2-\sqrt{3}$ है–

(1) परिमेय संख्या

(2) अपरिमेय संख्या

(3) सम संख्या

(4) पूर्णांक संख्या **(2)**

5. किसी धनात्मक पूर्णांक m का घन किस रूप का होगा–

(1) $9m$

(2) $9m+8$

(3) $9m+1$

(4) उपरोक्त सभी **(4)**

6. यूक्लिड विभाजन प्रमेय से संख्या 20 व 4 का HCF होगा–

(1) 5

(2) 1

(3) 20

(4) 4 **(4)**

7. निम्न में से कौनसी भिन्न का दशमलव प्रसार सांत होगा–

(1) $\frac{11}{700}$

(2) $\frac{91}{2100}$ **(2)**

(3) $\frac{343}{2^3\times5^3\times7^3}$

(4) इनमें से कोई नहीं

8. π एक है–

(1) प्राकृत संख्या

(2) वास्तविक संख्या

(3) अपरिमेय संख्या

(4) 2 व 3 दोनों (4)

9. दो संख्याओं का म.स. 15 व ल.स. 105 है। यदि उनमें से एक 5 है। तो दुसरी संख्या क्या होगी–

(1) 75 (2) 15

(3) 315 (4) 525 (3)

10. यदि $a=bq+r$ जहां a व b धनात्मक पूर्णांक हो तो –
(1) $r>b$
(2) $r<0$
(3) $r<b$
(4) इनमें से कोई नहीं (3)

11. 16200 के अभाज्य गुणनखण्डों का घातांक रूप .... है।
उ. $2^3\times3^4\times5^2$

12. $\frac{14588}{625}$ का दशमलव प्रसार .... है।
उ. सांत

13. दो संख्याओं a व b का HCF .... होगा।
उ. 1

14. 1225 के अभाज्य गुणनखण्डों की घातों का गुणनफल........ होगा।
उ. 4

15. 144 व 198 का महतम समापवर्त्य(म.स.) .... होगा।
उ. 18

16. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।
उ. माना कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$ जहां a,b दो सह अभाज्य संख्या है। तथा $b\neq0$

अतः $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$ का दोनों और वर्ग करने पर

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2}{b^2}=2$$

वज्र गुणा करने पर $a^2=2b^2$

अतः $b^2=\frac{a^2}{2}$ 1

यदि a^2 में, 2 का भाग जाता है तो a में भी 2 का भाग जायेगा।
माना $a=2C$

समीकरण 1 से $b^2=\frac{(2C)^2}{2}$

$$b^2=\frac{4C^2}{2}$$

$$b^2=2C^2$$

$$C^2=\frac{b^2}{2}$$

यदि b^2, में 2 का भाग जाता है तो b में भी 2 का भाग जायेगा। अतः हमारा माना हुआ गलत है कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या ही होगी। अतः $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या होगी।

17. यदि $HCF(96,104)=4$ हो तो LCM का मान ज्ञात कीजिए।
उ. हम जानते है कि दो पूर्णांक a,b हो तो

$$a\times b=LCM\times HCF$$

$$96\times404=LCM\times4$$

$$LCM=\frac{96\times404}{4}$$

$$LCM=9696$$

18. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से संख्याओं 196 व 3820 का HCF ज्ञात कीजिए।
उ. यहां $3820>196$ तो यूक्लिड विभाजन प्रमेय है।

$$3820=196\times19+96$$

$$196=96\times2+4$$

$$96=4\times24+0$$

शेष 0 प्राप्त होता है तो यह प्रक्रिया समाप्त हो गई तथा भाजक 4 है। अतः $HCF=4$ होगा।

19. परिमेय संख्या $\frac{17}{8}$ को बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए दशमलव प्रसार ज्ञात कीजिए।
उ. परिमेय संख्या $=\frac{17}{8}$

$$=\frac{17}{2\times2\times2}$$

$$=\frac{17}{2^3}$$

अंश व हर को 5^3 से गुणा करने पर

$$=\frac{17\times5^3}{2^3\times5^3}$$

$$=\frac{17\times5^3}{(2\times5)^3}$$

$$=\frac{17\times5\times5\times5}{(10)^3}$$

$$=\frac{2125}{1000}$$

$$=2.125$$

अतः दशमलव प्रसार सांत होगा।

20. सिद्ध कीजिए कि $2+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उ. माना कि $2+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $2+\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ जहां a,b दो सह अभाज्य पूर्णांक है तथा $b\neq 0$

$$\sqrt{5}=\frac{a}{b}-2$$

$$\sqrt{5}=\frac{a-2b}{b}$$

अतः $\frac{a-2b}{b}$ एक पूर्णांक संख्या है तथा परिमेय संख्या होगी। लेकिन $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। अतः यह एक विरोधाभाष है अतः हमारा माना हुआ गलत है कि $2+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या होगी। अतः $2+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या होगी।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

1. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए। जिसमें संख्याएं 306 व 657 पूर्णतः विभाजित हो।
2. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से पूर्णांकों 17, 23 व 29 का HCF व LCM ज्ञात कीजिए।
3. $\sqrt{5}$ को अपरिमेय संख्या सिद्ध कीजिए।
4. परिमेय संख्या $\frac{77}{210}$ का दशमलव प्रसार कैसा होगा।
5. युक्लिड विभाजन प्रमेय से पूर्णांकों 42 व 455 का HCF ज्ञात कीजिए।
6. $\sqrt{\frac{64}{81}}$ कौनसी .... संख्या है। (परिमेय/अपरिमेय)

उ. परिमेय

7. दो परिमेय संख्याओं के बीच .... परिमेय संख्या होती है।

उ. अनन्त

8. परिमेय व अपरिमेय संख्या का गुणनफल .... होगा।

उ. अपरिमेय संख्या

9. परिमेय संख्या $\frac{2^3}{2^3\times 5^2}$ का दशमलव प्रसार .... होगा।

उ. सांत

10. परिमेय संख्या $\frac{11}{15}$ का दशमलव प्रसार .... होगा।

उ. असांत

11. संख्याओं 25 व 50 के HCF व LCM का गुणनफल .... है।

उ. 1250

12. $\frac{\pi}{2}$ कौनसी संख्या है।

उ. अपरिमेय संख्या

13. संख्याएं $7\times 11\times 13+13$ व $7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1+5$ कौनसी संख्या है।

उ. भाज्य संख्या

14. $12112111211112.....$ कौनसी संख्या है।

उ. अपरिमेय संख्या

15. $43.\overline{123456789}$ कौनसी संख्या है।

उ. परिमेय संख्या

अध्याय–2

बहुपद

अंक(प्रश्न) $1(1)+2(1)=3(2)$

* बहुपद– ऐसा बीजीय व्यजंक जिसमें उपस्थित चर राशि की घात एक पूर्ण संख्या हो। बहुपद कहलाता है तथा चर राशि की उच्चतम घात ही बहुपद की घात होती है।

उदा. $4x+5, 3x^2+x+4, 2-x^3, 4x^o, \sqrt{3}a+\sqrt{7}, \sqrt{5}t^2$ आदि।

* रैखिक बहुपद– ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात एक हो। रैखिक बहुपद कहलाता है।
* x चर राशि के रैखिक बहुपद को $p(x)=ax+b$ जहां a,b वास्तविक संख्या है, से लिखते है तथा $a\neq 0$

उदा. $p(x)=4x+5, p(x)=5x, p(x)=2x+3, p(x)=\sqrt{3}x+5$

* द्विघात बहुपद– ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात 2 हो। द्विघात बहुपद कहलाता है।
* x चर राशि में द्विघात बहुपद को $p(x)=ax^2+bx+c$ से लिखते है जहां a,b,c तीन वास्तविक संख्या है। तथा $a\neq 0$

उदा. $p(x)=x^2+2x+1, p(x)=x^2-4, p(x)=5x^2$

$p(x)=\sqrt{3}x+2-x^2$

* त्रिघात बहुपद– ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात 3 हो त्रिघात बहुपद कहलाता है।
* x चर राशि में त्रिघात बहुपद को $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ से लिखे है। जहां a,b,c,d वास्तविक संख्या है। तथा $a\neq 0$

उदा.

$p(x)=\sqrt{2}x^3, p(x)=3-x^2+x^3, p(x)=3x^3-2x^2+x-1$

* यदि $p(x)$, चर x में कोई बहुपद है। और k कोई वास्तविक संख्या है। तो $p(x)$ में x को k से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त वास्तविक संख्या $p(x)$ का $x=k$ पर मान कहलाता है। तथा इसे $p(k)$ से निरूपित किया जाता है।

उदा.1 $p(x)=x^2-3x-4$ का $x=-1$ पर मान ज्ञात कीजए।

उ. बहुपद $p(x)=x^2-3x-4$

$x=-1$ रखने पर

$p(-1)=(-1)^2-3x(-1)-4$

$p(-1)=1+3-4$

$p(-1)=4-4$

$p(-1)=0$

उदा.2

बहुपद $p(x)=3x^2-2x+7$ का $x=2$ पर मान ज्ञात कीजिए।

उ. बहुपद $p(x)=3x^2-2x+7$

$x=2$ रखने पर

$p(x)=3(2)^2-2(2)+7$

$=3\times 4-4+7$

$=12-4+7$

$=8+7$

$=15$

* बहुपद के शुन्यक– एक वास्तविक संख्या k बहुपद $p(x)$ का शुन्यक कहलाती है। यदि $p(k)=0$

  अर्थात् बहुपद में उपस्थित चर राशि का वह मान जिसको बहुपद में रखने पर 0 प्राप्त हो। चर राशि का वह मान बहुपद का शुन्यक कहलाता है।

* जितनी बहुपद की घात होगी। उतने ही बहुपद के शुन्यक होते है।

उदा. 1

रैखिक बहुपद $p(x)=3x-4$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए।

उ. माना कि बहुपद $p(x)$ का शुन्यक k है तो

$p(k)=0$

अतः $3x-4=0$

$3x=4$

$x=\frac{4}{3}$

अतः $x=\frac{4}{3}$ बहुपद का शुन्यक होगा।

उदा. 2

द्विघात बहुपद $p(x)=x^2-3x-4$

$x=-1$ रखने पर

$p(-1)=(-1)^2-3(-1)-4$

$p(-1)=1+3-4$

$p(-1)=4-4$

$p(-1)=0$

$x=4$ रखने पर

$p(4)=(4)^2-3(4)-4$

$p(4)=16-12-4$

$p(4)=16-16$

$p(4)=0$

अतः द्विघात बहुपद $p(x)=x^2-3x-4$ के दो शुन्यक $x=-1,4$ होंगे।

बहुपद के शुन्यकों व गुणांकों में संबंध–

1. माना कि α,β बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ के दो शुन्यक है तो

शुन्यको का योग $=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शुन्यकों का गुणनफल $=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

2. माना कि α,β,γ त्रिघात बहुपद $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ के तीन शुन्यक है। तो

शुन्यकों का योग $=\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

शुन्यकों का गुणनफल $=\alpha\beta\gamma=\dfrac{-d}{a}=\dfrac{-\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

और $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}=\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

उदा. द्विघात बहुपद $p(x)=6x^2-3-7x$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए व शुन्यकों व गुणांकों में संबंध की सत्यता की जांच कीजिए।

उ. $p(x)=6x^2-3-7x$

$p(x)=6x^2-7x-3$

$p(x)=6x^2+(-7)x+(-3)$

$p(x)=6x^2+(-7)x+(-3)$ 1

द्विघात बहुपद का व्यापक रूप

$p(x)=ax^2+bx+c$ 2

शुन्यक–

$6x^2-7x-3=6x^2-9x+2x-3$

$=3x(2x-3)+1(2x-3)$

$=(2x-3)(3x+1)$

यहां $2x-3=0, 3x+1=0$ लेने पर

$2x=3, 3x=-1$

$x=\dfrac{3}{2}, x=-\dfrac{1}{3}$

अतः शुन्यक $\dfrac{3}{2},\dfrac{-1}{3}$ होंगे।

समीकरण 1 व 2 में

गुणांकों की तुलना करने पर

$a=6, b=-7, c=-3$

* शुन्यकों व गुणाकों में संबंध–

शुन्यकों का योग $=\dfrac{-b}{a}$, शुन्यकों का गुणनफल $=\dfrac{c}{a}$

$\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{-(-7)}{6}$ $\qquad$ $\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{-3}{6}$

$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{6}$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{2}$

$\dfrac{9-2}{6}=\dfrac{7}{6}$

$\dfrac{7}{6}=\dfrac{7}{6}$

कुछ महत्वपूर्ण तथ्य

1. रैखिक बहुपद $p(x)=ax+b$ को शुन्य के बराबर रखकर शुन्यक ज्ञात किया जा सकता है।

2. द्विघात बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ के शुन्यक ज्ञात करने के लिए इसके दो गुणनखण्ड करके दोनों को अलग–अलग शुन्य के बराबर रखकर मान ज्ञात किया जाता है।

* गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए द्विघात बहुपद में x के गुणांक b के दो ऐसे गुणनखण्ड करते है कि उनको जोड़ने या घटाने पर b प्राप्त हो तथा गुणा करने पर ac प्राप्त हो।

3. त्रिघात बहुपद $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ के शुन्यक ज्ञात करने के लिए पहले इसका एक गुणनखण्ड ज्ञात किया जाता है। तथा इस गुणनखण्ड का त्रिघात बहुपद में भाग देते है। जिसका भागफल एक द्विघात बहुपद प्राप्त होता है। द्विघात बहुपद फिर दो और गुणनखण्ड करके शुन्यक ज्ञात किया जाता है।

* द्विघात बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथम प्रमेय– यदि $p(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद है जहां $g(x)\neq 0$ हो तो हम बहुपद $q(x)$ व $r(x)$ ऐसे प्राप्त कर सकते है कि

$p(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$

जहां $r(x)=0$ है अथवा $r(x)$ की घात $<g(x)$ की घात है।

उदा. बहुपद $p(x)=x^3-4x^2+5x-2$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए व विभाजन एल्गोरथम प्रमेय की सत्यता की जांच कीजिए।

उ. $p(x)=x^3-4x^2+5x-2$

$x=2$ रखने पर

$p(2)=(2)^3-4(2)^2+5(2)-2$

$=8-16+10-2$

$= 18 - 18$

$= 0$

अतः $x = 2$ इसका एक शुन्यक होगा तथा $(x-2)$ एक गुणनखण्ड है।

$$x-2\overline{)x^3-4x^2+5x-2}(x^2+2x+1$$

$x^3 - 2x^2$

$-2x^2 + 5x - 2$

$-2x^2 + 4x$

$x - 2$

$x - 2$

0

यहां भागफल $g(x) = x^2 - 2x + 1$ दो और शुन्यक ज्ञात करने के लिए $g(x) = 0$ लेने पर

$x^2 - 2x + 1 = x^2 - x - x + 1$

$= x(x-1) - 1(x-1)$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$

अतः $x - 1 = 0, x - 1 = 0$ लेने पर

$x = 1, x = 1$

अतः त्रिघात बहुपद के तीन शुन्यक $x = 2,1,1$ होंगे।

* विभाजन एल्गोरिथम प्रमेय की सत्यता की जांच–

यहां $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$g(x) = x - 2$

$g(x) = x^2 - 2x + 1$

$r(x) = 0$

विभाजन एल्गोरिथम प्रमेय के अनुसार

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x^2 - 2x + 1) + 0$

$= x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2$

$= x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

महत्वपूर्ण प्रश्न

1. निम्न में से बहुपद है–
   (1) $\sqrt{3}x^2 + 4$
   (2) $3\sqrt{x} + 1$
   (3) $y + \frac{2}{y}$
   (4) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$
2. निम्न में से रैखिक बहुपद है–
   (1) $4x^2 - 3$
   (2) $4x - 1$
   (3) $x^2 + \frac{1}{x^2}$
   (4) 5
3. निम्न में से द्विघात बहुपद है–
   (1) $3x + 4$
   (2) 4
   (3) $x + \frac{1}{x^2}$
   (4) $2x^2 - 3x + 1$
4. बहुपद $p(x) = 4x^2 + 7x - 5x^3$ की घात है–
   (1) 4
   (2) 0
   (3) 3
   (4) 1
5. बहुपद $p(t) = t^2 - 15$ के शुन्यक होंगे–
   (1) 15, 15
   (2) –15,–15
   (3) $\sqrt{15}, \sqrt{15}$
   (4) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$
6. बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$ में शुन्यकों का गुणनफल होगा?
   (1) $\frac{-b}{a}$ (2) 1
   (3) $\frac{-b}{c}$ **(4)** $\frac{c}{a}$

7. बहुपद $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ में शुन्यकों का योग होगा?

(1) $\frac{-c}{a}$

(2) $\frac{-b}{a}$

(3) $\frac{-b}{d}$

(4) $\frac{c}{a}$

8. यदि बहुपद $p(x)=x^2-2x+5$ के शुन्यक a,b है। तो ab का मान क्या होगा?

(1) −2

(2) 5

(3) 3

(4) −5

9. यदि बहुपद $p(x)=x^2+2x+1$ के शुन्यक α व β है तो $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ का मान क्या होगा?

(1) 2

(2) −2

(3) 0

(4) 1

10. यदि बहुपद $p(x)=x^2+ax-b$ के शुन्यक एक दुसरे के व्युत्क्रम हो तब b का मान ज्ञात कीजिए।

(1) 1

(2) −1

(3) a

(4) $\frac{1}{a}$

11. द्विघात बहुपद $p(x)=x^2+7x+10$ के शुन्यक .... होंगे।

उ. $-2,-5$

12. बहुपद $p(x)=3x-7x^2+8$ की घात .... है।

उ. 2

13. बहुपद $p(x)=2-x^2+x^3$ में x^2 का गुणांक .... है।

उ. -1

14. यदि बहुपद $p(x)=x^2-9x+a$ के शुन्यकों का गुणनफल 8 है। तो a का मान .... क्या होगा।

उ. 8

15. एक त्रिघात बहुपद में अधिक से अधिक शुन्यकों की संख्या .... होगी।

उ. 3

16. बहुपद $p(x)=x^2-x-6$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए व शुन्यकों और गुणांकों में संबंध की सत्यता की जांच कीजिए।

उ. $p(x)=x^2-x-6$

$p(x)=0$ लेने पर

$x^2-x-6=0$

$x^2-3x+2x-6=0$

$x(x-3)+2(x-3)=0$

$(x-3)(x+2)=0$

अतः $x-3=0, x+2=0$

$x=3, x=-2$

अतः दो शुन्यक $x=3,-2$ होंगे।

बहुपद $p(x)=x^2-x-6$

$=x^2+(-1)x+(-6)$

बहुपद $p(x)$ का व्यापक रूप $\mathrm{p(x)=ax^2+bx+c}$

तुलना करने पर $a=1, b=-1, c=-6$

गुणांको व शुन्यकों में संबंध–

शुन्यकों का योग $=\frac{-b}{a}$

$3-2=\frac{-(-1)}{1}$

$3-2=1$

$1=1$

शुन्यकों का गुणनफल $=\frac{c}{a}$

$3\times(-2)=\frac{-6}{1}$

$-6=6$

17. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शुन्यकों का योग $\sqrt{2}$ व गुणनफल $\frac{1}{3}$ है।

उ. माना कि बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ के शुन्यकों का योग $=\frac{-b}{a}$ व गुणनफल $=\frac{c}{a}$ है तो

शुन्यकों का योग $=\frac{-b}{a}$

$\sqrt{2}=\frac{-b}{a}$..........(1)

समीकरण 1 से

शुन्यकों का गुणनफल $=\frac{c}{a}$

$\frac{1}{3}=\frac{c}{a}$....................(2)

समी. 1 व 2 से तुला करने पर

$$\frac{\sqrt{2}\times 3}{3}=\frac{-b}{a} \qquad a=3, b=-3\sqrt{2}, c=1$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{3}=\frac{-b}{a}$$ अतः द्विघात बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ से

$$p(x)=3x^2-3\sqrt{2}x+1$$

18. बहुपद $p(x)=3x^2-x-4$ के शुन्यक ज्ञात कीजिए।

उ. $p(x)=3x^2-x-4$

$p(x)=0$ लेने पर

$3x^2-x-4=0$

$3x^2-4x+3x-4=0$

$x(3x-4)+1(3x-4)=0$

$(3x-4)(x+1)=0$

अतः $3x-4=0, x+1=0$

$3x=4 \qquad x=-1$

अतः शुन्यक $x=\frac{4}{3},-1$ होंगे।

19. k का मान ज्ञात कीजिए यदि बहुपद $p(x)=kx^2-3x+k$ का $x=1$ शुन्यक है।

उ. बहुपद $p(x)=kx^2-3x+k$ का $x=1$ शुन्यक है तो

$p(1)=0$ होगा।

अतः $kx^2-3x+k=0$ से

$k(-1)^2-3(1)+k=0$

$k-3+k=0$

$2k=3$

$k=\frac{3}{2}$

20. यदि बहुपद $p(x)=x^3-3x^2+x+1$ के शुन्यक $a-b, a, a+b$ है तो a व b का मान ज्ञात कीजिए।

उ. बहुपद $p(x)=x^3-3x^2+x+1$

त्रिघात बहुपद का व्यापक रूप

$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

तुलना करने पर $a=1, b=-3, c=1, d=1$

शुन्यकों का योग $=\frac{-b}{a}$

$a+b+a+a-b=\frac{-(-3)}{1}$

$3a=3$

$a=\frac{3}{3}$

$a=1$

शुन्यको का गुणनफल $=\frac{-d}{a}$

$(a+b)\times a\times(a-b)=\frac{-1}{1}$

$a=1$ रखने पर

$(1+b)\times 1\times(1-b)=-1$

$(1+b)(1-b)=-1$

$(1)^2-(b)^2=-1$

$1-b^2=-1$

$-b^2=-1-1$

$-b^2=-2$

तो $b^2=2$

$b=\pm\sqrt{2}$

अतः $a=1, b=\pm\sqrt{2}$ होंगे

अध्याय–3
दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म

अंक(प्रश्न) $1(1)+1(1)+4(1)=6(3)$

* रैखिक समीकरण– एक ऐसा समीकरण जिसमें उपस्थित चर की घात एक हो।
* दो चरों वाला रैखिक समीकरण– जब समीकरण में उपस्थित चरों की संख्या दो और दोनों की घात एक–एक हो।
* दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप

$a_1x+b_1y+c_1=0$
$a_2x+b_2y+c_2=0$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, b_2$ वास्तविक संख्या।
x, y चर है।

* दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण आलेखन (ग्राफ) करने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है। अतः समीकरण युग्म में दो सरल रेखायें एक समतल पर प्राप्त होगी। जिनकी स्थिति

1. दोनों रेखायें एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।
2. दोनों रेखायें प्रतिच्छेद नहीं करें अर्थात् समान्तर हो।
3. दोनों रेखायें एक दूसरे को ढके अर्थात् सम्पाती हो।

* रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधियां–
* प्रतिस्थापन विधि– एक चर का मान दूसरे चर के पदों में लिखना।
* विलोपन विधि– एक चर का विलोप करके दूसरे चर का मान ज्ञात करना।
* वज्र गुणा विधि– $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}$$

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}$$

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-b_1a_2} \qquad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-b_1a_2}$$

रैखिक समी.युग्म	$\frac{a_1}{a_2}\ \frac{b_1}{b_2}\ \frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणित निरूपण	संगत/असंगत
$x-2y=0$ $3x+9y=20$	$\frac{1}{3}\ \frac{-2}{9}\ \frac{0}{20}$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	प्रतिच्छेदी रेखाए	केवल एक हल (अद्वितीय)	संगत
$x-2y=-5$ $2x-4y=10$	$\frac{1}{2}\ \frac{-2}{-4}\ \frac{-5}{10}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाए	कोई हल नहीं	असंगत
$x+2y=5$ $3x+6y=15$	$\frac{1}{3}\ \frac{2}{6}\ \frac{5}{15}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	सम्पाती रेखाए	अनन्त हल	संगत

1. दो चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय को हल करने की विधि है–
(1) प्रतिस्थापन
(2) विलोपन
(3) वज्रगुणन
(4) उपरोक्त सभी

2. दो अंकों वाली संख्या होगी यदि इकाई का अंक x व दहाई का अंक हो–
(1) $10x+y$
(2) $10y+x$
(3) दोनों
(4) इनमें से कोई नहीं

3. यदि समीकरण $kx-5y=2$ तथा $6x+2y=7$ के कोई हल न हो तो –
(1) $k=-10$
(2) $k=-5$
(3) $k=-6$
(4) $k=-15$

4. समीकरण $x+y=6$ के कितने हल होंगे?
(1) एक
(2) दो
(3) अनन्त
(4) एक भी नहीं

5. दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म का हल करते समय एक चर का मान दूसरे चर के पद में व्यक्त करने वाली विधि कहलाती है।
(1) आलेख विधि
(2) विलोपन विधि
(3) प्रतिस्थापन विधि
(4) वज्रगुणन

6. एक रैखिक समीकरण की घात होगी–
(1) 0
(2) 2
(3) 1
(4) कोई नहीं

7. दो रैखिक समीकरणों के आलेख प्रतिच्छेदी रेखाऐं है, तब रैखिक समीकरण युग्म का
(1) कोई हल नहीं है
(2) अद्वितीय हल
(3) दो हल
(4) अनेक हल

8. समीकरण निकाय $\begin{matrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{matrix}$ में यदि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ तो समीकण निकाय का हल है–
(1) कोई हल नहीं
(2) अद्वितीय हल
(3) अनेक हल
(4) दो हल

9. यदि रैखिक समीकरण का कोई युग्म संगत हो, तो इसके आलेख की रेखाएं होगी–
(1) समान्तर
(2) सदैव सम्पाती
(3) प्रतिच्छेदी या सम्पाती
(4) प्रतिच्छेदी

10. समीकरण $5x+2y=16$ और $6x+\frac{12}{5}y=4$ का हल होगा–
(1) संगत
(2) असंगत
(3) 1 व 2
(4) उपर्युक्त में से कोई नहीं

11. निम्न रैखिक समीकरण युग्म के हल है–
$x+y=4 \qquad x-y=2$
(1) $x=3, y=1$
(2) $x=1, y=3$
(3) $x=y=2$
(4) $x=4, y=0$

12. यदि $\frac{4}{x}+5y=7$ तथा $x=\frac{-4}{3}$ हो, तो y का मान होगा–
(1) $\frac{37}{15}$ **(2)** 2
(3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{3}$

अति लघुतरात्मक प्रश्न

1. अनुपात $\frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए। कि सभी युग्मों द्वारा निरूपित रेखायें कैसी है?

उ. यदि

(i) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	रेखाएं सम्पाती	अनेक हल
(ii) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	समान्तर	कोई हल नहीं
(iii) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेदी	अद्वितीय हल

2. k के किस मान के लिये समीकरण निकाय $\begin{matrix} x+2y=3 \\ 5x+ky=15 \end{matrix}$ के अनन्त हल होंगे?

उ. अनन्त हल होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

$a_1=1 \qquad b_1=2 \qquad c_1=3$
$a_2=5 \qquad b_2=k \qquad c_2=15$

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{k}=\frac{3}{15}$$

$k=5\times 2=10$

3. समीकरण निकाय $x-y+1=0$ और $3x+2y-12=0$ को हल करो।

उ. $x-y+1=0$ $x-y=-1$ 1

$3x+2y-12=0$ $3x+2y=12$ 2

समी. 1 को 2 से गुणा करने पर

$$2x-y=-2$$
$$3x+2y=12$$
$$5x=10$$
$$x=\frac{10}{5}=2$$

x का मान समीकरण 1 में रखने पर

$$2-y=-1$$
$$2+y=y \quad \Rightarrow y=3$$

4. एक संख्या का तीन गुणा और दूसरी संख्या का दो गुने का अन्तर 9 है, इसको बीजगणित रूप में लिखिए।

उ. माना संख्या $=x$

दूसरी संख्या $=y$

$3x-2y=9$

1. समीकरण $x+2y=9$ में यदि $x=5$ हो तो y का माना होगा।
2. 9 पेंसिल तथा 8 पेन का मूल्य 54 रु. है। इसको बीजगणितीय समीकरण के रूप में लिखिए।

3. क्या बिन्दु $(2,3)$ रेखा $3x-2y=5$ पर स्थित है।
4. एक पिता और उसके पुत्र की आयु का योगफल 40 वर्ष है। यदि पिता की आयु पुत्र की आयु का तीन गुना हो तो उनकी आयु ज्ञात करो।
5. रैखिक समीकरण युग्म $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0$ तथा $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=0$ का हल लिखिए।
6. समीकरण $5x-3x-10=0$ में y को x के रूप में व्यक्त करो।
7. रैखिक समीकरण युग्म $\begin{matrix} x-3y=7 \\ x+4y=14 \end{matrix}$ को हल करो।
8. k के किस मान के लिये समीकरण निकाय $\begin{matrix} 2x+ky=1 \\ 3x-5y=7 \end{matrix}$ का कोई हल विद्यमान नहीं है।
9. दिखाइये रेखाएं $\begin{matrix} x-4y+5=0 \\ 3x-12+8=0 \end{matrix}$ समान्तर है।
10. निम्न समीकरण निकाय के हलों की प्रकृति ज्ञात करो–
$2x+4y=7, 3x+6y=0$

निबंधात्मक प्रश्न

1. दो रेखायें समीकरण $\begin{matrix} 3x+y=32 \\ 6x+8y=24 \end{matrix}$ द्वारा निरूपित की गई है। इस स्थिति को आलेखीय रूप में व्यक्त करो।

उ. $3x+y=32$

$y=32-3x$ 1

x	10	9	8
y	2	5	8

समीकरण 1 से

$x=10$

$y=32-3(10)$

$=32-30$

$y=2$

$x=9$ रखने पर

$y=32-3(9)$

$=32-27$

$y=5$

$x=8$ रखने पर

$6x+8y=24$

$y=\frac{24-6x}{8}$ 2

x	0	4	8
y	3	0	-3

समीकरण 2 से

$x=0$ रखने पर

$y=\frac{24-6(0)}{8}=\frac{24}{8}=3$

$x=4$ रखने पर

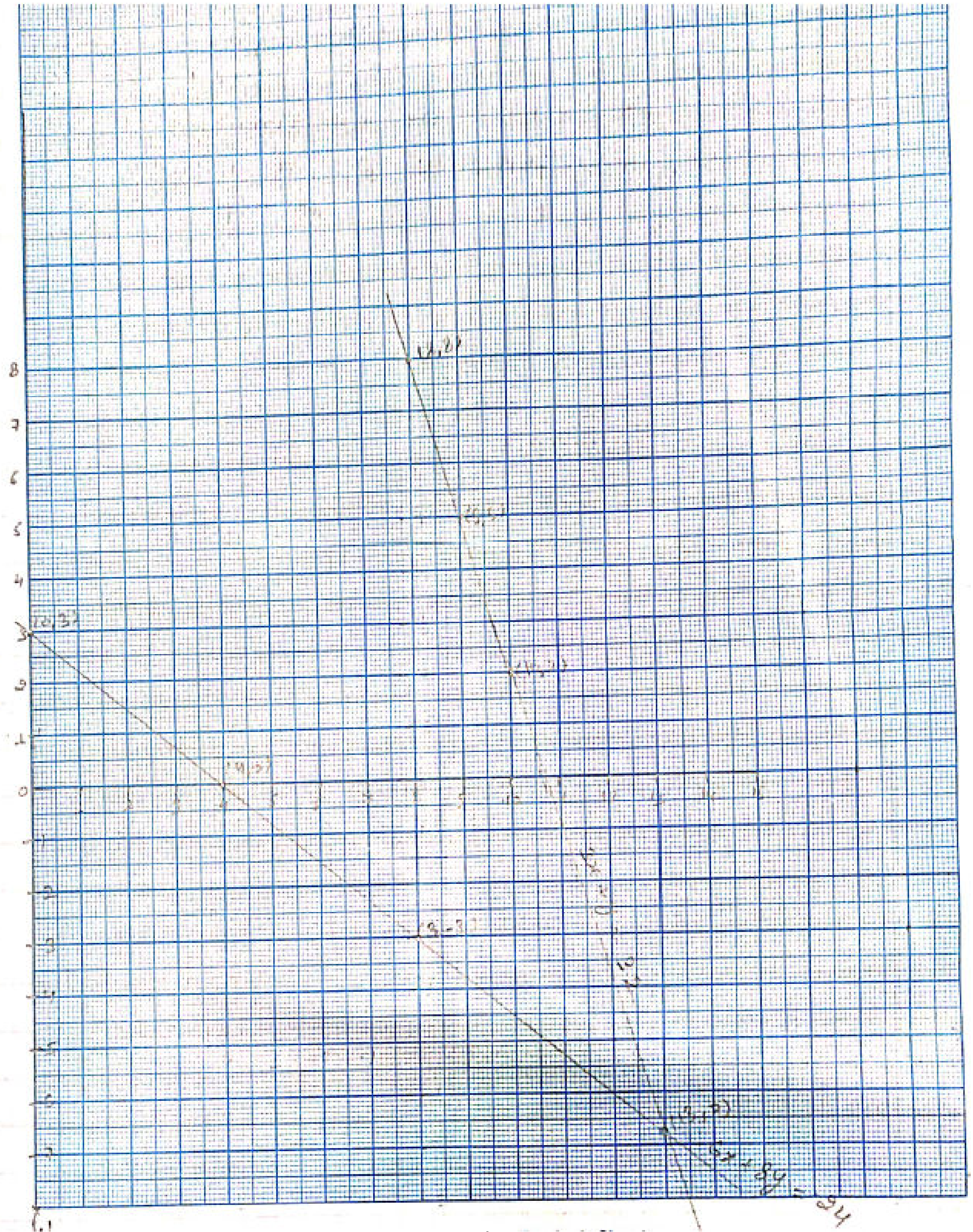
$y=\frac{24-6(4)}{8}=\frac{24-24}{8}$

$=\frac{0}{8}=0$

$x=8$ रखने पर

$y=\frac{24-6(8)}{8}=\frac{24-48}{8}$

$=\frac{-24}{8}=-3$



2. क्रिकेट टीम के एक कोच ने एक बल्ला और 2 गेंदे 300 रु. में खरीदी बाद में एक ही प्रकार के अन्य 2 बल्ले तथा 3 गेंदे 525 रु. में खरीदी। इस स्थिति को बीजगणितीय रूप में व्यक्त करो एवं इसको ग्राफीय विधि से हल करो। यह भी ज्ञात करो कि कोच एक बल्ला तथा एक गेंद रुपयों में खरीद सकेगा।

3. समीकरण $\begin{matrix} 5x-y=5 \\ 3x-y=3 \end{matrix}$ के ग्राफ खींचिए। इन रेखायें और y अक्ष से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात करो।

4. $4x-5y=20$ को आलेखीय विधि से हल करो।
$3x+5y=15$

5. $3x-5y=1$ को आलेखीय विधि से हल करो।
$2y-y=3$

अध्याय–4
द्विघात समीकरण

1 वस्तुनिष्ठ + 1 अति लघुत्तरात्मक + लघुत्तरात्मक

अंक(प्रश्न) $1(1)+1(1)+2(1)=4(3)$

* चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का होता है, जहां a, b, c वास्तविक संख्याएं है और $a \neq 0$

Ex.1 निम्न में से कौनसा द्विघात समीकरण नहीं है–

(1) $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ (2) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(3) $x(2x+3) = x^2 + 1$ (4) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

Ex.2 निम्न को द्विघात समीकरण के रूप में बदलिए–

(i) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(ii) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

हल–

(i) $2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$

$2x^2 - x^2 - 6x - 5x + x - 3 = 0$

$x^2 - 10x - 3 = 0$

(ii) $2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$

$2x^2 - x^2 - 6x - x + x - 5x + 3 + 5 = 0$

$x^2 - 11x + 8 = 0$

* एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो।

* गुणनखण्डों द्वारा द्विघात समीकरण का हल :– द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों को $ax^2 + bx + c$ के दो रैखिक गुणनखण्डों में गुणनखंडित करके और प्रत्येक गुणनखंड को शुन्य के बराबर करके प्राप्त किये जाते है।

Ex.1 द्विघात समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

Sol. $6x^2 - x - 2 = 0$

$6x^2 - 4x + 3x - 2 = 0$

$2x(3x-2) + 1(3x-2) = 0$

$3x - 2 = 0$ और $2x + 1 = 0$

$3x = 2$ और $2x = -1$

$x = 2/3$ और $x = -1/2$

अतः समीकरण के मूल 2/3 और –1/2 है।

Ex.2 द्विघात समीकरण $3x^2 - 2\sqrt{6} + 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

Sol. $3x^2 - 2\sqrt{6} + 2 = 0$

$3x^2 - \sqrt{6}\,x - \sqrt{6}\,x + 2 = 0$

$\sqrt{3}\,x(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2})(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{3}\,x - \sqrt{2} = 0$ और $\sqrt{3}\,x - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3}\,x = \sqrt{2}$ और $\sqrt{3}\,x = \sqrt{2}$

$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ और $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Note-

(i) मूलों के सत्यापन के लिए यह जांच करते है कि चर x के मान द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते है या नहीं

(ii) द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक ही होते हैं।

* द्विघात समीकरण का पूर्ण वर्ग बनाकर हल :–

(i) दिये गये द्विघात समीकरण में x^2 के गुणांक का भाग दीजिए।

(ii) अचर पद का पक्षान्तरण RHS में करे।

(iii) x के गुणांक का आधा करके उसका वर्ग कर दोनों पक्षों में जोड़िए।

(iv) दिया गया द्विघात समीकरण $(x \pm A)^2 = K^2$ में बदल जायेगा।

Ex.1 $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए।

Sol. $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 - \frac{7}{4}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-3}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$x^2 - 2 \times \frac{7}{4}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-3}{2} + \frac{49}{16}$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-24+49}{16}$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right) = \pm\frac{5}{4}$$

(i) धनात्मक चिन्ह लेने पर

$$x - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

(ii) ऋणात्मक चिन्ह लेने पर

$$x - \frac{7}{4} = \frac{-5}{4}$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

* द्विघात समीकरण का हल द्विघाती सूत्र/श्री धराचार्य सूत्र द्वारा

* द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल द्विघाती सूत्र से ज्ञात करना

द्विघाती सूत्र $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

यहां $a = x^2$ का गुणांक

$b = x$ का गुणांक

$c =$ अचर पद

चर के दो मान $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ तथा $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ प्राप्त होते है।

* द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति $b^2 - 4ac$ पर निर्भर करती है।

* $b^2 - 4ac$ यह निश्चित करता है कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वास्तविक है अथवा नहीं। इसे द्विघात समीकरण का

विविक्तकर कहते हैं।

* द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के

(i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते है, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो, वास्तविक व भिन्न–भिन्न

(ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो, वास्तविक व समान

(iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होता, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो, काल्पनिक/आभासी

Note- यदि द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व बराबर हो तो प्रत्येक मूल $-\frac{b}{2a}$ होता है।

(i)	$b^2 - 4ac = 0$	(ii)	$b^2 / 4ac = 0$	(iii)	$b^2 - 4ac = 0$
	$b^2 = 4ac$		$b^2 = 4ac$		$b^2 = 4ac$
	$b = \sqrt{4ac}$		$a = \frac{b^2}{4c}$		$c = \frac{b^2}{4a}$

Ex.1 द्विघात समीकरण $x^2 - 5x - 300 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए।

हलः $x^2 - 5x - 300 = 0$ यहाँ $a = 1, b = -5, c = -300$

$b^2 - 4ac$

$(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-300) = 25 + 1200$

$= 1225$

Ex.2 द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हलः द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ में

$a = 2, b = -4, c = 3$ विविक्तर $b^2 - 4ac$

$(-4)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$16 - 24$

-8

$-8 < 0$ दिये गये समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

* द्विघात समीकरण का एक मूल α तथा दुसरा β हो तब द्विघात समीरण $ax^2 + bx + c = 0$

(i) मूलों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{का गुणांक}}$

(ii) मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{का गुणांक}}$

Ex. द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x - 5 = 0$ के मूलों का योग और मूलों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हलः $2x^2 - 3x - 5 = 0$ के मूल माना α व β है।

$a = 2$

$b = -3$ $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$

$c = -5 \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

* द्विघात समीकरण बनाना जब मूलों का योग व गुणनफल दिया जाये।

x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल = 0

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

Ex. वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल 3, –3 हो।

हलः मूलों का योग $(\alpha+\beta) = 3 + (-3) = 0$

मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta) = 3 \times (-3) = -9$

समीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$x^2 - (0)x + (-9) = 0$

$x^2 - 9 = 0$

विविध

1. द्विघात समीकरण का व्यापक रूप है–

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ (2) $ax^2 + b$ (3) $bx + x^2$ (4) None of these (1)

2. द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ का एक मूल $\frac{1}{2}$ हो तो दुसरा मूल क्या होगा?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (1)

3. द्विघात समीकरण के मूलों का योग है– $x^2 - 5x + 6 = 0$

(1) 5 (2) –5 (3) 6 (4) –6 (1)

4. समीकरण $px^2 + qx + r = 0$ में विवेचक का मान क्या हैं?

(1) $q^2 + 4pr$ (2) $q^2 - 4pr$ (3) $4pr + q$ (4) None of these (2)

5. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वास्तविक और समान होने पर प्रत्येक मूल होगा।

(1) $\frac{b}{2a}$ (2) $\frac{-c}{a}$ (3) $\frac{-b}{2a}$ (4) $\frac{-2b}{a}$ (3)

6. निम्नलिखित में से कौन द्विघात समीकरण है–

(1) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ (2) $(x+2)^3 = 2x(x-3)$ (3) $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 0$ (4) All of these (1)

7. द्विघात समीकरण $(2x+1)(3x-2) = 0$ के हल होगें–

(1) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}$ (3) $2, \frac{3}{2}$ (4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (4)

8. समीकरण $6x^2 - x - 12 = 0$ का मूल है–

(1) $\frac{-4}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{-3}{4}$ (1)

9. समीकरण $x^2 + 4x + 5 = 0$ के हल होगें।

(1) एक (2) दो (3) वास्तविक हल नहीं (4) इनमें से कोई नहीं (3)

10. द्विघात बहुपद के शून्यक और द्विघात समीकरण के मूल क्या है।

(1) शून्यक और मूल भिन्न है। (2) शून्यक और मूल एक ही है।

(3) 1 व 2 दोनों (4) इनमें से कोई नहीं (2)

11. निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए–

(i) $x^2 - 36 = 0$

(ii) $2x^2 - x - 6 = 0$

(iii) $x^2 - 2x - 35 = 0$

12. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों का योग व गुणनफल ज्ञात कीजिए–

(1) $x^2 + 2x - 3 = 0$

(2) $2x^2 - 3x + 6 = 0$

(3) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$

(4) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

13. निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो मूल बराबर हो।

(1) $2x^2 + kx + 3 = 0$

(2) $kx(x-2) + 6 = 0$

(3) $x^2 - kx + 4 = 0$

(4) $x^2 - 2x + k = 0$

14. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए–

(1) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

(2) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(3) $4x^2 - 12x - 9 = 0$

15. निम्न को द्विघात समीकरण बनाकर हल कीजिए।

(1) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0,2$

16. द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए

    (1) $2x^2 + 3x - 90 = 0$

    (2) $x^2 - 7x - 60 = 0$

17. द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $2+\sqrt{5}$ और $2-\sqrt{5}$ है।

18. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

19. ऐसी दो संख्याएं ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हों

20. ऐसे दो क्रमागत विषय धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योग 290 हो।

अध्याय–5
समान्तर श्रेढ़ी

1 वस्तुनिष्ठ + 1 अतिलघुतरात्मक + 1 दीर्घउतरीय $= 3$ प्रश्न

अंक (प्रश्न) $1(1)+1(1)+3(1)=5(3)$

* एक समान्तर श्रेढी संख्याओं की ऐसी सूची होती है। जिसमें प्रत्येक पद (पहले पद के अतिरिक्त) अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त होता है।
* यह निश्चित संख्या समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर (d) कहलाती है।
* यह सार्वअन्तर (d) धनात्मक,. ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।
* एक समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप

  a, a +d, a + 2d , a + 3d, a + 4d, ... है।

  जहां a- प्रथम पद तथा d- सार्वअन्तर होता है।

Ex. 3, 5, 7, 9, 11, ...

$a = 3$ & $d = 5 - 3 = 2$

* समान्तर श्रेढ़ी के सभी पदों का अन्तर समान होता है।
* समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर अगले पद में से ठीक पहला पद घटाने पर प्राप्त होता है।

  Ex- $a_1, a_2, a_3, a_4,$ .... a_n A.P. है तो $d = a_2 - a_1$
* यदि AP में पदों की संख्या परिमित हो अर्थात् अंतिम पद दिया हो तो यह परिमित AP कहलाती है। जैसे– 3, –1, –5, ..., –45
* यदि AP में कोई अंतिम पद न हो तो यह अपरिमित AP कहलाती है। जैसे– $\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{2},$...............
* प्रथम पद a और सार्वअन्तर d वाली एक AP का n वां पद

  $a_n = a + (n-1)d$ सूत्र से ज्ञात किया जाता है।
* a_n को AP का व्यापक पद भी कहते है।

Ex.1 AP में $a = 11$ तथा $d = -3$ हो तो प्रथम चार पद ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{llll} a, & a+d, & a+2d, & a+3d \\ 11, & 11+(-3), & 11+2(-3), & 11+3(-3 \\ 11, & 11-3, & 11-6, & 11-9 \\ 11, & 8, & 5, & 2 \end{array}$$

हलः (ऊपर)

Ex.2 AP $-7,-9,-11,-13$ के लिए प्रथम पद (a) और सार्वअन्तर (d) ज्ञात कीजिये।

हलः प्रथम पद $(a) = -7$, सार्वअन्तर $(d) = a_2 - a_1$

$$= -9 - (-7)$$
$$= -9 + 7$$
$$d = -2$$

Ex.3 $AP:\ 10,7,4,........$ का 30 वां पद ज्ञात कीजिए।

हलः $a=10$, $d=7-10=-3$, $n=30$

$$a_n=a+(n-1)d$$
$$a_{30}=1+(30-1)(-3)$$
$$=10+29\times(-3)$$
$$=10+(-87)$$
$$=-77$$

अतः AP का 30वां पद -77 होगा।

Ex.4 किसी AP का 6वां एवं 12वां पद क्रमशः 13 और 25 है, इसका 20वां पद ज्ञात कीजिए।

हलः दिया है $a+5d=13$

$$a+11d=25$$
$$-\quad -\quad -$$
$$-6d=-12$$
$$d=2$$

d का मान समीकरण 1 में रखने पर

$$a+5(2)=13$$
$$a=13-10$$
$$a=3$$

$a=3, d=2$

$$a_n=a+(n-1)d$$
$$a_{20}=3+(20-1)(2)$$
$$a_{20}=3+19\times 2$$
$$=3+38$$
$$a_{20}=41$$

अतः AP का 20वां पद 41 होगा।

* किसी AP में कुल पदों की संख्या n है अन्त से m वां पद शुरू से $(n-m+1)$ वां पद होता है।

AP: 17,14, 11, ... 40 का अन्त से 6वां पद होगा।

Ex.1 $a = 17$, $d = 14 - 17 = -3$, $a_n=-40$

$$a_n = a + (n - 1)d$$
$$-40 = 17 + (n-1)(-3)$$
$$3n=40+20$$
$$3n=60$$
$$n=20$$

इस श्रेढ़ी में पदों की संख्या 20 है। तो अन्त से 6वां पद शुरू से $(20 - 6 + 1) = 15$वां पद होगा।

$$a_{15}=17+(15-1)(-3)$$
$$a_{15} = 17 + 14 \times (-3)$$
$$a_{15} = 17 - 42$$
$$a_{15} = -25$$

श्रेढ़ी का अन्त से 6वां पद -25 होगा।

हलः 2 AP का अन्तिम पद $l = -40$ है। प्रथम पद (a) = 17 एवं सार्वअन्तर $d = -3$ है इस प्रकार अन्तिम से 6वां पद

$$a_n = l - (n-1)d$$
$$a_6 = -40 - (6-1)(-3)$$
$$a_6 = -40 - (5 \times -3) = -40 - (-15) = -40 + 15 = -25$$

* किसी AP के प्रथम n पदों का योगफल $S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$ होता है।

* एक परिमित AP का अंतिम पद ℓ है तो AP के सभी पदों का योग $S = \frac{n}{2}(a + \ell)$ से ज्ञात किया जा सकता है।

* AP : 8, 3, -2, ... के प्रथम 22 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

$a = 8$ $\qquad S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

$d = 3 - 8 = -5$ $\qquad = \frac{22}{2}\left[2 \times 8 - (22-1)(-5)\right]$

$n = 22$ $\qquad = 11[16 - 21 \times 5]$

$$= 11[16 - 105]$$
$$= 11[-89] = -979$$

अतः दी गई AP के प्रथम 22 पदों का योगफल –979 होगा।

Ex.2 एक AP जिसके प्रथम पद और अंतिम पद क्रमशः 5 और 75 है। AP के 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः $a = 5$ $\qquad S = \frac{n}{2}(a + \ell)$

$\ell = a_n = 75$ $\qquad = \frac{15}{2}(5 + 75)$

$n = 15$ $\qquad S = \frac{15}{2}(8) = \frac{15 \times 80}{2} = 15 \times 40 = 600$

अतः AP के 15 पदों का योग 600 होगा।

* किसी AP का n वां पद उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम $(n-1)$ पदों के योग के अंतर के बराबर होता है।

अर्थात् $a_n = S_n - S_{n-1}$ जैसे $a_2 = S_2 - S_1$

Ex. यदि किसी AP के n पदों का योग $S_n = 4n - n^2$ है तो पहला पद क्या है? इसके पहले दो पदों का योग क्या है? इसी प्रकार तीसरे 10वें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

हलः AP के n पदों का योग $S_n = 4n - n^2$ है।

$n = 1$ पर $S_1 = 4\times1-(1)^2 = 4-1 = 3$

अतः प्रथम पद 3 है।

प्रथम दो पदों का योगफल $S_2 = 4\times2-(2)^2 = 8-4$

अतः प्रथम दो पदों का योग 4 है।

दुसरा पद $= S_2 - S_1$

$= 4 - 3$

$= 1$

प्रथम तीन पदों का योग $S_3 = 4\times3-(3)^2$

$= 12 - 9$

$= 3$

तीसरा पद $S_3 - S_2 = 3 - 4 = -1$

अतः $AP = 3, 1 - 1, ...$

$a = 3, d = 1 - 3 = -2$

n वां पद या $a_n = a + (n-1)d$

$a_n = 3 + (n-1)(-2)$

$= 3 - 2n + 2$

$a_n = 5 - 2n$

AP का 10वां पद $n = 10$ लेने पर

$a_n = 5 - 2n$

$= 5 - 2\times10$

$= 5 - 20 = -15$

इस प्रकार 10वां पद –15 होगा।

* प्रथम n धन पूर्णांकों का योग $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है।

Ex. प्रथम 100 धन पूर्णांकों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः माना $S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$ है।

$$S_n = \frac{n}{2}(a+\ell)$$

$$= \frac{100}{2}(1+100) = 50 + 101 = 5050$$

विविध प्रश्नमाला

1. निम्न में से कौनसी AP नहीं है–

(1) $a, 2a, 3a, 4a, ...$ (2) $-10, -6, -2, 2, ...$ (3) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$ (4) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, ...$ (4)

2. यदि AP का n वां पद $3n + 5$ है तो इसका प्रथम पद व सार्वअन्तर होगा–

(1) 8, 3 (2) -2, 3 (3) 8, -3 (4) -8,3 (1)

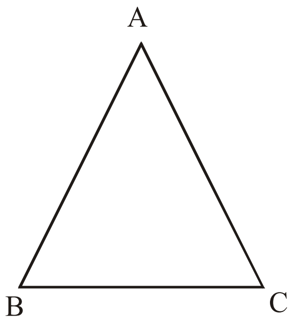
3. यदि AP का प्रथम पद 6 और सार्वअन्तर 3 हो तो AP होगी।
(1) 6, 9, 12, 15,.. (2) -6, -9,-12,-15,... (3) 3, 6, 9, 12,.... (4) -4,-6,-9,-12,.... (1)
4. एक AP का प्रथम पद एवं अंतिम पद क्रमशः 2 व 8 है। n पदों का योग 90 है तो n का मान होगा।
(1) 13 (2) 14 (3) 15 (4) 18 (4)
5. यदि AP का प्रथम पद 2 और सार्वअन्तर 3 हो तो n वां पद होगा?
(1) $2n-1$ (2) $2n+1$ (3) $3n-1$ (4) $3n+1$ (3)
6. AP $-17,-12,-7,....$ में 11वां पद है–
(1) 33 (2) -33 (3) -67 (4) 67 (1)
7. $AP:8,5,2,-1,-4,-7$ का सार्वअन्तर है–
(1) -3 (2) 3 (3) 0 (4) 8 (1)
8. समान्तर श्रेढ़ी का 7वां पद तथा 13वां पद क्रमशः 34 व 64 है तो इसका 18वां पद है–
(1) 89 (2) 88 (3) 87 (4) 90 (1)
9. दो समान्तर श्रेढ़ियों का सार्वअन्तर समान है उनमें से एक का पहला पद 8 है और दुसरे का 3 है। उनके 30वें पदों के बीच अन्तर है–
(1) 11 (2) 3 (3) 8 (4) 5 (4)
10. 10 पदों वाली एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 3 व अंतिम पद 21 है तो श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात कीजिए।
11. यदि $18,a,b,-3$ समान्तर श्रेढ़ी है में है तो a व b का मान लिखिए।
12. श्रेढ़ी 3, 8, 13, 18, ... का कौनसा पद 78 है।
13. 10, 17, 24, ... कौनसा पद 13वें पद से 84 अधिक है।
14. यदि एक AP के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और –8 है तो इसका कौनसा पद शून्य होगा।
15. AP : $3,-2,-7,-12,......$ का सार्वअन्तर और अगले दो पद ज्ञात कीजिए।
16. 3 व 101 के मध्य 7 से विभाजित (भाज्य) होने वाली सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।
17. AP : 17, 15, 13, ... के कितने पद लिये जाएं ताकि उनका योग 81 हो।
18. श्रेढ़ी 21, 18, 15, ... –24 में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
19. एक AP जिसका तीसरा और सातवां पद क्रमशः 5 और 9 है। इसका 11वां पद ज्ञात कीजिए।
20. यदि किसी AP के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है तो 20वां पद ज्ञात कीजिए।
21. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का आठवां और दसवां पद क्रमशः 21 तथा 25 है तो श्रेढ़ी के पहले 50 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
22. यदि किसी AP के प्रथम 12 पदों का योगफल 516 है तथा इसका सार्वअन्तर 6 है तो 10वां पद ज्ञात कीजिए।
23. एक AP का 17वां पद उसके 10वें से 7 अधिक है। इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।
24. AP के प्रथम 22पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसमें सार्वअन्तर 7 है और 22वां पद 149 है।
25. किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र प्रदर्शन के लिए 7 नगद पुरस्कार देने के लिए 700 रुपये की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से 20 रुपये कम है तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि ज्ञात कीजिए।

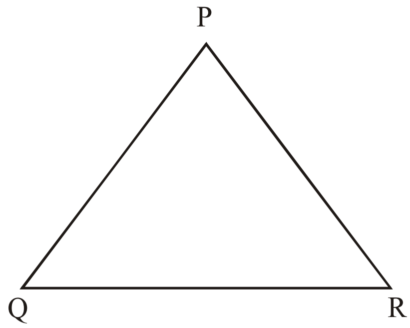
अध्याय–6
त्रिभुज

अंक(प्रश्न) 1(1) + 1(1) + 2(1) = 4(3)

* सर्वागसम :– जब दो त्रिभुज समान आकार (शेप) तथा समान आमाप (साईज) के हो सर्वागसम त्रिभुज कहलाते है।

समरूप :– जब दो त्रिभुज या आकृतियां जिनके आकार (शेप) समान हो परन्तु आमाप (साईज) समान होना आवश्यक नहीं है। केवल भुजाओं की लम्बाईयां का अनुपात समान होना चाहिए समरूप त्रिभुज कहलाते है। उदाहरण





$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

समरूपता के नियम –

1. SSS (भुजा भुजा भुजा)
2. SAS (भुजा कोण भुजा)
3. AAA/AA (कोण कोण कोण)

* दो समान कोणिक त्रिभुजों में उनकी संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान रहता है।

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

1. सभी वृत .... होते है। (सर्वांगसम, समरूप)

उ. समरूप

2. सभी वर्ग .... होते है। (समरूप, सर्वांगसम)

उ. समरूप

3. सभी .... त्रिभुज समरूप होते है। (समद्विबाहु, समबाहु)

उ. समबाहु

4. दो त्रिभुज सर्वांगसम कहे जाते है जब उनके आकार और आमाप .... होते है। (समान, असमान)

उ. समान

5. यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हो तो ये त्रिभुज .... होते है। (सर्वांगसम, समरूप)

उ. समरूप

6. दो त्रिभुजों की संगत भुजाएं परस्पर .... हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होते है। (समानुपाती, वर्गानुपाती)

उ. समानुपाती

7. एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाये गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाये गये समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का .... होता है। (आधा, बराबर)

उ. आधा

8. यदि एक त्रिभुज में, किसी एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गो के योग के बराबर हो तो पहली भुजा के सम्मुख कोण .... होता है। (समकोण, न्यूनकोण)

उ. समकोण

9. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गो के अनुपात के .... होता है। (समान, असमान)

उ. समान

10. एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गो के .... के बराबर होता है। (योग, अन्तर)

उ. योग

11. यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करें, तो यह रेखा तीसरी भुजा के .... होती है। (समान्तर/असमान्तर)

उ. समान्तर

12. ΔABC में $AB = 6\sqrt{3}cm, AC = 12cm, BC = 6cm$ हो तो कोण B का मान .... होगा। $(90^o, 120^o)$

उ. 90^o

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न–

13. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है और इनके क्षेत्रफल क्रमशः $64cm^2$ और $121cm^2$ है। यदि $EF = 15.4cm$ हो तो BC ज्ञात कीजिए।

हलः $\dfrac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$

या $\dfrac{64}{121} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$

या $\left(\dfrac{8}{11}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{154}\right)^2$

या $\dfrac{8 \times 15.4}{11} = BC$

या $BC = 11.2cm$

14. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E, F है। $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तो इनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करो।

हलः $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{BC}{DF}\right)^2$

$$= \left(\frac{2DF}{DF}\right)^2 \qquad \left[\because \frac{1}{2}BC = DF\right]$$

$$= \frac{4}{1} = 4:1$$

15. 10 मीटर लम्बी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8 मीटर ऊंचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुंचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

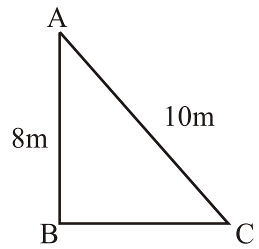
हलः ΔABC में

कर्ण² = आधार² + लम्ब²

$10^2 = BC^2 + 8^2$

$100 - 64 = BC^2$

$6 = BC$

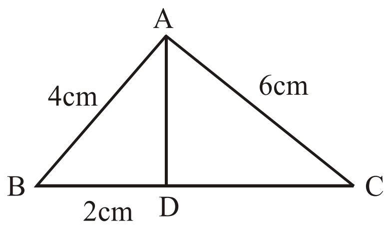


16. ΔABC में AD कोण $\angle BAC$ का समद्विभाजक है। यदि $AB = 4cm, AC = 6cm, BD = 2cm$ हो तो DC का मान ज्ञात कीजिए।

हलः आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से

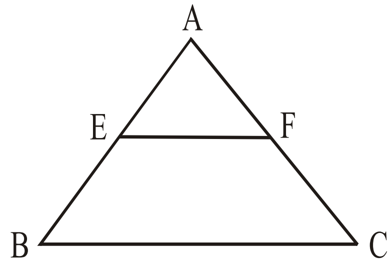
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{2}{DC} = \frac{4}{6} \Rightarrow DC = \frac{6 \times 2}{4} = 3cm$$



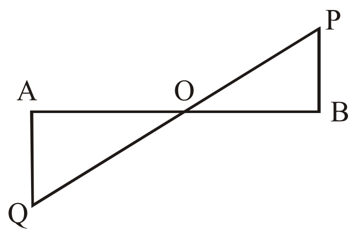
अभ्यास प्रश्न

1. चित्र में $EF \parallel BC$ यदि $AE:BE = 4:1$ और $CF = 1.5cm$ हो तो AF की लम्बाई ज्ञात करो।



2. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 16 : 81 है तो इनकी भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

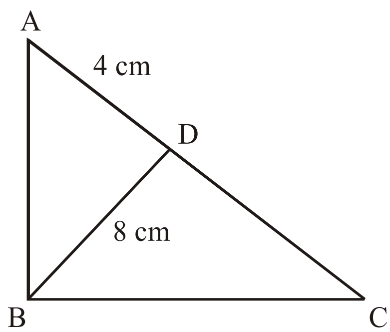
3. दी गई आकृति में QA और PB, AB पर लम्बवत है यदि $AO = 10cm$, $BO = 6cm$ और $PB = 9cm$ हो तो AQ की लम्बाइ ज्ञात करो।



4. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है यदि $\angle A = 40^o, \angle E = 80^o$ है तो $\angle C$ का मान ज्ञात करो।

5. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF, AB = 5cm, DE = 3cm$ तथा ΔABC का क्षेत्रफल $= 50cm^2$ हो तो ΔDEF का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. दी गई आकृति में $\angle ABC = 90^o$ तथा $BD \perp AC$ है यदि $BD = 8cm$ तथा $AD = 4cm$ हो तो CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

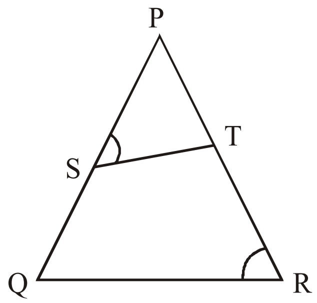


7. बौधायन प्रमेय का कथन लिखिए।

8. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार है कि D भुजा BC का मध्य बिन्दु है त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

लघुत्तरात्मक प्रश्न

1. आकृति में $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ है तथा $\angle PST = \angle PRQ$ है तो सिद्ध कीजिए कि ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल: दिया है $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

अतः थेल्स प्रमेय के विलोम से

$ST \parallel QR$

इसलिए $\angle PST = \angle PQR$ (संगत कोण) 1

लेकिन दिया है $\angle PST = \angle PRQ$ 2

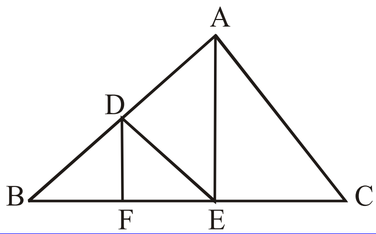
समीकरण 1 व 2 से

$\angle PRQ = \angle PQR$

अतः $PQ = PR$ (समान कोणों की सम्मुख भुजाएं)

अर्थात ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

2. चित्र में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।



हलः ΔBAC में

$DE \parallel AC$ अतः थेल्स प्रमेय से

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} \qquad ....1$$

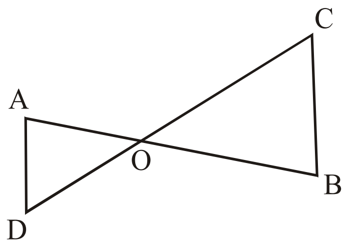
ΔBAE में

$DF \parallel AE$ अतः थेल्स प्रमेय से

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FE} \qquad ....2$$

समीकरण 1 व 2 से $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

3. चित्र में $OA.OB = OC.OD$ है दर्शाइए कि $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।



हलः $OA.OB = OC.OD$ (दिया है)

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \qquad ...1$$

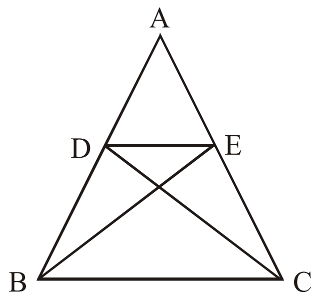
$\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण) ...2

$\Delta AOD \sim \Delta COB$ (SAS समरूपता कसौटी)

समरूप त्रिभुजों के संगत कोण समान होते है।

$\angle A = \angle C$ और $\angle D = \angle B$

4. आकृति में $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है।



हलः दिया है $\Delta ABE \cong \Delta ACD$

अतः $AB = AC, AE = AD$

$$\frac{AB}{AC} = 1, \frac{AE}{AD} = 1$$

अतः $$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = 1 \qquad ...1$$

ΔADE व ΔABC में

$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ (समीकरण 1 से)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (SAS समरूपता कसौटी)

अध्याय–7
निर्देशांक ज्यामिति

अंक (प्रश्न) 1(1) + 2(1) + 3(1) = 6(3)

* किसी बिन्दु P का x निर्देशांक या भुज x हो और y – निर्देशांक या कोटि y हो तो P के निर्देशांक (x, y) लिखते है।
* मूल बिन्दु के निर्देशांक $(0,0)$ होते है।
* दो बिन्दुओं के बीच की दूरी – बिन्दुओं $P(x,y)$ व $Q(x_2,y_2)$ के बीच की दूरी $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
* मूल बिन्दु $(0,0)$ से किसी बिन्दु (x, y) की दूरी $= \sqrt{x^2 + y^2}$
* दूरी हमेशा धनात्मक होती है।
* x अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x,0)$ होते है।
* y अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ होते है।
* तीन बिन्दु $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ दिए गए हो तब त्रिभुज बन सकता है। भुजाओं की लम्बाई के आधार पर त्रिभुज का वर्गीकरण

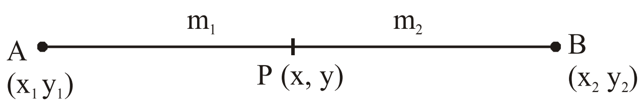
समबाहु त्रिभुज	समद्विबाहु त्रिभुज	समकोण त्रिभुज
$AB = BC = AC$	$AB = BC \quad AC$	कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2
(तीनों भुजाएं बराबर)	(किंही दो भुजाएं बराबर)	(सबसे बड़ी भुजा कर्ण)

* चार बिन्दु $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), D(x_4,y_4)$ दिए गए हो तब चतुर्भुज बनता है। चतुर्भुज का वर्गीकरण

समान्तर चतुर्भुज	आयत	समचतुर्भुज	वर्ग
$AB = CD$ & $BC = AD$	$AB = CD$ & $BC = AD$	$AB = BC = CD = AD$	$AB = BC = CD = AD$
तथा विकर्ण	तथा विकर्ण	तथा विकर्ण	तथा विकर्ण
$AC \quad BD$	$AC = BD$	$AC \quad BD$	$AC = BD$

* दो बिन्दुओं $A(x_1,y_1)$ और $B(x_2,y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजन करने वाले बिन्दु P के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2 + x_1}{m_1 + m_2}, y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$



* दो बिन्दुओं $A(x_1,y_1)$ और $B(x_2,y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

* समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते है।

* समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (विकर्णो का गुणनफल)

* तीन बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ दिए गए हो तब

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

* त्रिभुज का क्षेत्रफल हमेशा धनात्मक होगा।

* तीन बिन्दु संरेख होंगे तब त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

अभ्यास प्रश्न

1. बिन्दु $(3,4)$ की y अक्ष से दूरी होगी–

(1) 1 (2) 4 (3) 2 (4) 3 (4)

2. बिन्दु $(6,-3)$ की x अक्ष से दूरी होगी।

(1) 6 (2) 3 (3) 2 (4) –3 (2)

3. बिन्दु $(5,-7)$ की कोटि है।

(1) 5 (2) –7 (3) 7 (4) –5 (2)

4. बिन्दु $(4,-3)$ किस चतुर्थांश में स्थित है?

(1) प्रथम (2) द्वितीय (3) तृतीय (4) चतुर्थ (4)

5. दो अक्षो के प्रतिछेदी बिन्दु को कहते है?

(1) निर्देशांक अक्ष (2) x-अक्ष (3) मूल बिन्दु (4) y-अक्ष (3)

6. बिन्दुओं $A(3,-2)$ और $B(5,2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु है?

(1) (4, 2) (2) (4, 0) (3) (8, 0) (4) (8, 4) (2)

7. दो बिन्दुओं $(0, \cos\theta)$ तथा $(\sin\theta, 0)$ के मध्य दूरी है–

(1) 1 (2) 0 (3) $\frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$ (4) $\sin\theta + \cos\theta$ (1)

8. x अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु की कोटि होती है–

(1) 1 (2) 0 (3) –1 (4) x (2)

9. किसी बिन्दु की y अक्ष से दूरी होती है–

(1) बिन्दु की कोटि (2) बिन्दु का भुज (3) बिन्दु के निर्देशांक (4) इनमें से कोई नहीं (2)

10. निर्देशांक ज्यामिति में कुल कितने चतुर्थांश होते है–

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (4)

11. यदि बिन्दु $(x,3)$ और $(5,7)$ के बीच की दूरी 5 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हलः बिन्दु $(x,3)$ व $(5,7)$ के बीच की दूरी $=5$

$$\sqrt{(x-5)^2+(3-7)^2}=5$$

दोनों पक्षो का वर्ग करने पर

या $(x-5)^2+(-4)^2=25$

या $x^2-10x+25+16=25$

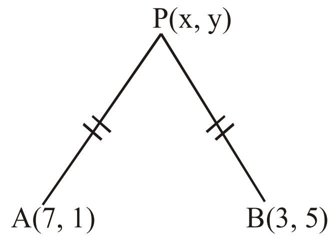
या $x^2-10x+16=0$

या $(x-2)(x-8)=0$

$x=2,8$

12. x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए ताकि बिन्दु (x,y) बिन्दुओं $(7,1)$ और $(3,5)$ से समदूरस्थ हो।

हलः माना कि बिन्दु $P(x,y)$, बिन्दुओं $A(7,1)$ और $B(3,5)$ से समदूरस्थ है।



$$AP=BP$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$AP^2=BP^2$$

$$(x-7)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-5)^2$$

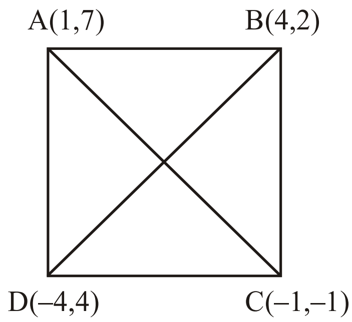
$$x^2-14x+49+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-10y+25$$

$$x-y=2$$

x और y में वांछित संबंध है।

13. दर्शाइए कि बिन्दु $(1,7),(4,2),(-1,-1)$ और $(-4,4)$ एक वर्ग के शीर्ष है।

हलः माना कि दिए गए बिन्दु $A(1,7), B(4,2), C(-1,-1)$ व $D(-4,4)$ है।



$$AB=\sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

$$BC=\sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$$

$$CD=\sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

$$DA=\sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$$

विकर्ण $AC=\sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$

$$BD=\sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}$$

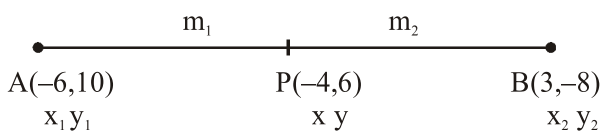
$AB = BC = CD = DA$ तथा विकर्ण $AC = BD$

अतः $ABCD$ एक वर्ग है।

14. बिन्दु $(-4,6)$, बिन्दुओं $A(-6,10)$ और $B(3,-8)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित करता है।

हलः माना कि बिन्दु $P(-4,6)$, बिन्दुओं $A(-6,10)$ और $B(3,-8)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है। अतः विभाजन सूत्र से

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$



मान रखने पर

$$-4 = \frac{m_1(3) + m_2(-6)}{m_1 + m_2}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

$$-4m_1 - 3m_1 = -6m_2 + 4m_2$$

$$-7m_1 = -2m_2$$

$$7m_1 = 2m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

अतः यह 2 : 7 के अनुपात में विभाजित करता है।

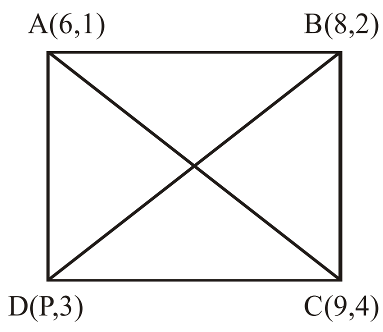
15. यदि बिन्दु $A(6,1), B(8,2), C(9,4)$ और $D(P,3)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हो तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते है कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते है।

विकर्ण AC का मध्य बिन्दु के निर्देशांक = विकर्ण BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{5}{2}\right)$$



तुलना करने पर

$$\frac{15}{2} = \frac{8+P}{2}$$

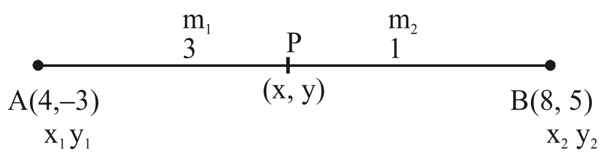
$$15 = 8 + P$$

$$P = 7$$

16. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(4,-3)$ और $(8,5)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को आंतरिक रूप से 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

हलः माना कि उस बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) है अतः विभाजन सूत्र से

$$x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$



$$x=\frac{3(8)+1(4)}{3+1}, y=\frac{3(5)+1(-3)}{3+1}$$

$$x=\frac{24+4}{4}, y=\frac{15-3}{4}$$

$$x=\frac{28}{4}, y=\frac{12}{4}$$

$$x=7, y=3$$

अतः उस बिन्दु के निर्देशांक $(7,3)$ है।

17. बिन्दुओं $A(5,2), B(4,7)$ और $C(7,-4)$ से बनने वाले ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

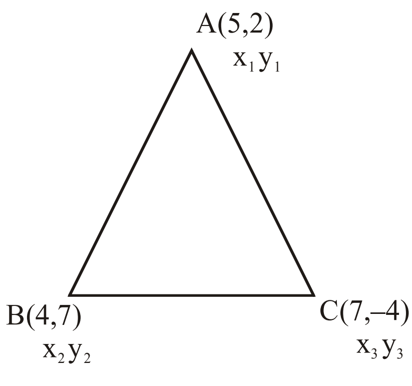
हलः ΔABC का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

$$=\frac{1}{2}[5(7+4)+4(-4-2)+7(2-7)]$$

$$=\frac{1}{2}[5(11)+4(-6)+7(-5)]$$

$$=\frac{1}{2}[55-24-35]$$

$$=\frac{1}{2}[55-59]$$

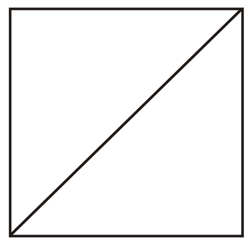


$=\frac{-4}{2}=-2$ (क्षेत्रफल कभी ऋणात्मक नहीं होता है।)

त्रिभुज का क्षेत्रफल 2 वर्ग मात्रक है।

18. यदि $A(-5,7), B(-4,-5), C(-1,-6)$ और $D(4,5)$ एक चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष है तो इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः B को D से मिलाने पर दो त्रिभुज ABD व BCD प्राप्त होते है।



ΔABD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[(-5)(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$

$= \frac{1}{2}[(-5)(-10)+(-4)(-2)+4(12)]$

$= \frac{1}{2}[50+8+48]$

$= \frac{106}{2} = 53$ वर्ग मात्रक

ΔBCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[(-4)(-6-5)+(-1)(5+5)+4(-5+6)]$

$= \frac{1}{2}[(-4)(-11)+(-1)(10)+4(1)]$

$= \frac{1}{2}[44-10+4]$

$= \frac{38}{2} = 19$ वर्ग मात्रक

अतः चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल $= 53+19 = 72$ वर्ग मात्रक

अभ्यास हेतु प्रश्न

1. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(3,2), (-2,-3)$ और $(2,3)$ एक समकोण के शीर्ष है।
2. x अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(2,-5)$ और $(-2,9)$ से समदूरस्थ है।
3. बिन्दुओं $(4,-1)$ और $(-2,-3)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
4. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $A(1,-5)$ और $B(-4,5)$ को मिलाने वाला रेखाखण्ड x अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
5. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में $(3,0), (4,5), (-1,4)$ और $(-2,-1)$ है।
6. k का मान ज्ञात कीजिए यदि बिन्दु $A(2,3), B(4,k)$ और $C(6,-3)$ संरेखी है।
7. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में $(-4,-2), (-3,-5), (3,-2)$ और $(2,3)$ है।
8. निर्धारित कीजिए की क्या बिन्दु $(1,5), (2,3)$ और $(-2,-11)$ संरेखी है।

अध्याय –8
त्रिकोणमिति का परिचय

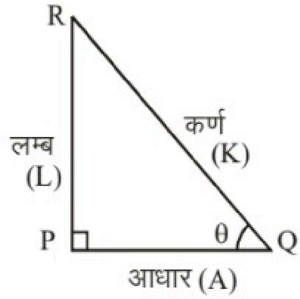
* त्रिकोणमितीय अनुपात :– समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों का उसके न्यूनकोणों को सापेक्ष अध्ययन को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते है।

$\frac{LAL}{KKA}$

$\sin\theta = \frac{L}{K}$ $\qquad \cot\theta = \frac{A}{L}$

$\cos\theta = \frac{A}{K}$ $\qquad \sec\theta = \frac{K}{A}$

$\tan\theta = \frac{L}{A}$ $\qquad \cos ec\theta = \frac{K}{L}$



* **व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय अनुपात –**

$$\cos ec\theta = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta.\cos ec\theta = 1$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta.\sec\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta.\cot\theta = 1$$

* $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos ec\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

* विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी –

डिग्री रेडियम	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
/ त्रिकोणमितीय अनुपात	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\cos ec\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

* **पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात –**

पूरक कोण – वे दो कोण जिनका योग 90^o होता है।

$$\sin(90^o - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90^o - \theta) = \sin\theta$$
$$\tan(90^o - \theta) = \cot\theta$$
$$\cot(90^o - \theta) = \tan\theta$$
$$\sec(90^o - \theta) = \cos ec\theta$$
$$\cos ec(90^o - \theta) = \sec\theta$$

* **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएें –**

* $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, $\quad \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

* $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$, $\quad \Rightarrow \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

* $\cos ec^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\Rightarrow \cos ec^2\theta = 1 + \cot^2\theta$, $\quad \Rightarrow \cot^2\theta = \cos ec^2\theta - 1$

Part - A (भाग–अ)

1. $\tan 45^o + \cot 45^o$ का मान होगा –

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0 Ans (b)

Ans. $\tan 45^o + \cot 45^o$

$= 1 + 1 = 2$

2. $2\sin 45^o . \cos 45^o$ का मान ज्ञात करो –

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0 Ans a)

Ans. $2\sin45^o . \cos45^o$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1$

3. $\tan^2 60^\circ$ का मान है –

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) 3 (d) $\frac{1}{3}$ Ans (c)

Ans. $\tan^2 60^\circ = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 \left\{\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}\right\}$

4. यदि $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$ हो तो θ का मान है –

(a) 90° (b) 60°

(c) 45° (d) 30° Ans (d)

Ans. $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin 30^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$

5. $\frac{3\sec 51^\circ}{\operatorname{cosec} 39^\circ}$ का मान है –

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0 Ans (c)

Ans. $\frac{3\sec(90^\circ - 39^\circ)}{\operatorname{cosec} 39^\circ} = \frac{3\operatorname{cosec} 39^\circ}{\operatorname{cosec} 39^\circ} = 3$

6. $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + 1$ बराबर है –

(a) 2 (b) 1

(c) ½ (d) 0 Ans (a)

Ans. $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + 1$

$1 + 1 = 2$ $\left\{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right\}$

7. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है –

(a) 1 (b) 8

(c) 9 (d) 0 Ans (c)

Ans. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

$= 9\left[\sec^2 A - \tan^2 A\right] = 9 \times 1 = 9$ $\left\{\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1\right\}$

8. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ और $\cos B = \frac{1}{2}$, तब (A + B) का मान है –

(a) 30° (b) 0°

(c) 60° (d) 90° Ans (d)

Ans. $\sin A = \frac{1}{2}$ $\sin B = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin A = \sin 30^{o}$ $\Rightarrow \cos B = \cos 60^{o}$ $\therefore A + B = 30^{o} + 60^{o} = 90^{o}$

$\Rightarrow A = 30^{o}$ $\Rightarrow B = 60^{o}$

9. $\cos(90^{o} - 48^{o})$ का मान है –

(a) $\sin 48^{o}$ (b) $\sec 48^{o}$

(c) $\tan 48^{o}$ (d) $\cot 48^{o}$ Ans (a)

Ans. $\cos(90^{o} - 48^{o})$

$= \sin 48^{o}$ $\{\because \cos(90^{o} - \theta) = \sin\theta\}$

10. $\frac{1 - \cos\theta}{\sin 2\theta}$ का मान $\theta = 45^{o}$ है –

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) –1 Ans (b)

Ans. $\theta = 45^{o}$ रखने पर –

$= \frac{1 - \cos 2 \times 45^{o}}{\sin 2 \times 45^{o}} = \frac{1 - \cos 90^{o}}{\sin 90^{o}} = \frac{1 - 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

* निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिका में लिखिए –

1. $\sin(90^{o} - \theta) =$ ....

Ans. $\sin(90^{o} - \theta) = \cos\theta$

2. यदि $\sin\theta = \cos\theta$ तो $\theta =$ ....

Ans. $\sin\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin(90^{o} - \theta)$

$\Rightarrow \theta = 90^{o} - \theta$ $\Rightarrow 2\theta = 90^{o}$, $\Rightarrow 45^{o}$

3. यदि $\tan A = \cot B$, तो A + B का मान .... है।

Ans. tan A = cot B

$\Rightarrow \tan A = \tan(90^{o} - B)$

$\Rightarrow \tan A = \tan(90^{o} - B)$

$\Rightarrow A = 90^{o} B \Rightarrow A + B = 90^{o}$

4. $\frac{1 - \tan^2 45^{o}}{1 + \tan^2 45^{o}} =$ ....

Ans. $= \frac{1 - (1)^2}{1 + (1)^2} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$ $\{\because \tan 45^{o} = 1\}$

5. $\cos48^\circ - \sin42^\circ =$ ....

Ans. $\cos48^\circ - \sin(90^\circ - 48^\circ)$

$= \cos48^\circ - \cos48^\circ = 0$

6. $(1 + \tan^2(1+\tan^2\theta)(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$ का मान .... है।

Ans. $= \sec^2\theta(1-\sin^2\theta)$

$= \sec^2\theta \times \cos^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \times \cos^2\theta = 1$

7. यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ हो तो θ का मान .... होगा।

Ans. $= \tan\theta = \sqrt{3}$

$= \tan\theta = \tan 60^\circ$

$= \theta = 60^\circ$

8. यदि $\tan A = 1$ है तो $\sec A$............ होगा –

Ans. $\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$= \sec^2 A = 1 + (1)^2$

$= \sec^2 A = 1 + 1$

$= \sec^2 A = 2$

$= \sec A = \sqrt{2}$

अतिलघुतरात्मक प्रश्न –

1. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$ का मान है –

Ans. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3+3}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

2. $\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

Ans. $= \dfrac{\sin(90^\circ - 72^\circ)}{\cos 72^\circ}$

$= \dfrac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1$

3. यदि $\tan 2A = \cot (A - 18^o)$, जहां 2A एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए–

Ans. $\tan 2A = \cot (A - 18^o)$

$\Rightarrow \cot (90^o - 2A) = \cot (A - 18^o)$ $\quad \because \tan\theta = \cot(90^o - \theta)$

$\Rightarrow 90^o - 2A = A - 18^o$

$\Rightarrow 90^o + 18^o = A + 2A$

$\Rightarrow 108 = 3A$

$\Rightarrow A = \dfrac{108}{36} = 36^o$

4. $\sin\theta.\cos(90^o - \theta) + \cos\theta \sin(90^o - \theta) + 1$ का मान लिखिए –

Ans. $= \sin\theta - \sin\theta + \cos\theta.\cos\theta + 1$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 1$ $\quad \{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\}$

$= 1 + 1 = 2$

5. $\cos^2 50^o + \cos^2 40^o$ का मान ज्ञात कीजिए –

Ans. $= \cos^2 50^o + \cos^2(90^o - 50^o)$

$= \cos^2 50^o + \sin^2 50^o$ $\quad \{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\}$

$= 1$

6. $\dfrac{2\tan 30^o}{1 + \tan^2 30^o}$

Ans. $= \dfrac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\quad \left\{\because \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$= \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 \times \frac{1}{9}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. यदि $\tan\theta = \cot\theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए –

Ans. $\tan\theta = \cot\theta$

$\Rightarrow \theta = 90^o - \theta$

$\Rightarrow \theta^o + \theta^o = 90^o$ $\quad \Rightarrow 2\theta^o = 90^o \Rightarrow \theta = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$

8. त्रिकोणमितीय अनुपात tan A को sec A के पदों में लिखिए –

Ans. $\because \sec^2 - \tan^2 = 1$

$\Rightarrow \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

$\Rightarrow \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

3. यदि $\tan 2A = \cot (A - 18^o)$, जहां 2A एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए–

Ans. $\tan 2A = \cot (A - 18^o)$

$\Rightarrow \cot (90^o - 2A) = \cot (A - 18^o)$ $\quad \because \tan\theta = \cot(90^o - \theta)$

$\Rightarrow 90^o - 2A = A - 18^o$

$\Rightarrow 90^o + 18^o = A + 2A$

$\Rightarrow 108 = 3A$

$\Rightarrow A = \frac{108}{36} = 36^o$

4. $\sin\theta.\cos(90^o - \theta) + \cos\theta \sin(90^o - \theta) + 1$ का मान लिखिए –

Ans. $= \sin\theta - \sin\theta + \cos\theta.\cos\theta + 1$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 1$ $\quad \{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\}$

$= 1 + 1 = 2$

5. $\cos^2 50^o + \cos^2 40^o$ का मान ज्ञात कीजिए –

Ans. $= \cos^2 50^o + \cos^2 (90^o - 50^o)$

$= \cos^2 50^o + \sin^2 50^o$ $\quad \{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\}$

$= 1$

6. $\frac{2\tan 30^o}{1 + \tan^2 30^o}$

Ans. $= \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\quad \left\{\because \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 \times \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{9}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7. यदि $\tan\theta = \cot\theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए –

Ans. $\tan\theta = \cot\theta$

$\Rightarrow \theta = 90^o - \theta$

$\Rightarrow \theta^o + \theta^o = 90^o$ $\quad \Rightarrow 2\theta^o = 90^o \Rightarrow \theta = \frac{90^o}{2} = 45^o$

8. त्रिकोणमितीय अनुपात $\tan A$ को $\sec A$ के पदों में लिखिए –

Ans. $\because \sec^2 - \tan^2 = 1$

$\Rightarrow \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

$\Rightarrow \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

9. $\frac{1}{\sqrt{\cos ec^2\theta-1}}$ का मान लिखिए –

Ans. $=\frac{1}{\sqrt{\cot^2\theta}}=\frac{1}{\cot\theta}=\tan\theta$ $\{\because \cot^2\theta=\cos ec^2\theta-1\}$

10. $\cot 85^o+\cos 75^o$ को 0^o और 45^o के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए–

Ans. $\cot 85^o+\cos 75^o$

$=\cot(90^o-5^o)+\cos(90^o-15^o)$

$=\tan 5^o+\sin 15^o$

Part - B (भाग – ब)

1. यदि $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ और $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $0^o<A+B\le 90^o, A>B$ तो A व B का मान ज्ञात कीजिए–

Ans. $\because \tan(A+B)=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan(A+B)=\tan 60^o$

$\Rightarrow A+B=60^o$ ... (i)

तथा $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow A-B=30^o$ ... (ii)

समीकरण (i) व (ii) से –

$A+B=60^o$

$A-B=30^o$

$\Rightarrow 2A=90^o$

$\Rightarrow A=\frac{90^o}{2}=45^o$ समीकरण (i) में रखने पर –

$\Rightarrow 45^o+B=60^o$

$\Rightarrow B=60^o-45^o=15^o$

2. $\frac{5\cos^2 60^o+4\sec^2 30^o-\tan^2 45^o}{\sin^2 30^o+\cos^2 30^o}$ का मान है –

Ans. $=\frac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{1}$ $\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

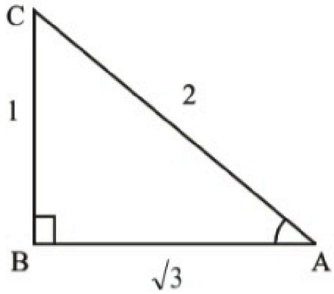
$=5\times\frac{1}{4}+4\times\frac{4}{3}-1$

$=\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-\frac{1}{1}$

$$= \frac{15+64-12}{12} = \frac{67}{12}$$

3. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

Ans. $\sin A \cos C + \cos A \sin C$



$\because \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow L = 1, A = \sqrt{3}, K = ?$

पाइथागोरस प्रमेय से –

कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2

$\Rightarrow$ कर्ण^2 $= \left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2$

$\Rightarrow$ कर्ण^2 $= 3 + 1$

$\Rightarrow$ कर्ण^2 $= 4$

सर्वप्रथम – $\angle A$ के लिए – $A = \sqrt{3}, L = 1, K = 2$

$$\sin B = \frac{L}{K} = \frac{1}{2}, \cos A = \frac{A}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

तथा $\angle C$ के लिए – $A = 1, L = \sqrt{3}, K = 2$

$$\cos C = \frac{A}{K} = \frac{1}{2}, \sin C = \frac{L}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A \cos C + \cos A \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

4. सिद्ध कीजिए –

$\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

Ans. LHS $= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan (90^\circ - 48^\circ) \tan (90^\circ - 23^\circ)$

$= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \cot 48^\circ \cot 23^\circ$

$$= \frac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ} \cdot \frac{\sin 23^\circ}{\cos 23^\circ} \cdot \frac{\cos 48^\circ}{\sin 48^\circ} \cdot \frac{\cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}$$

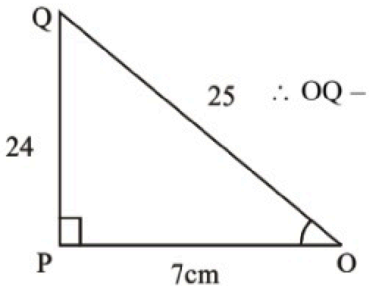
$= 1$

5. ΔOPQ में, जिसका कोण P समकोण है, OP = 7 cm और OQ – PQ = 1 cm, sin Q और cos Q के मान ज्ञात कीजिए–

Ans. ΔOPQ में –

पाइथागोरस प्रमेय से –

कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2



$\therefore OQ - PQ = 1 \Rightarrow OQ = 1 + PQ$

$\Rightarrow OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$\Rightarrow (1 + PQ)^2 = 7^2 + PQ^2$

$\Rightarrow 1 + PQ^2 + 2PQ = 49 + PQ^2$

$\Rightarrow 2PQ = 49 - 1$

$\Rightarrow 2PQ = 48 \Rightarrow PQ = \frac{48}{2} = 24$

$\because OQ = 1 + PQ$

$\Rightarrow OQ = 1 + 24 = 25$

LQ के लिए – A = 24, L = 7, K = 25

$\sin Q = \frac{L}{K} = \frac{7}{25}$

$\cos Q = \frac{A}{K} = \frac{24}{25}$

6. यदि 3cot A = 4, तो $\frac{1-\cos^2 A}{1+\tan^2 A}$ का मान लिखिए –

Ans. 3cot = 4

$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3} = \frac{A}{L}$

यहां A = 4, L = 3, K = ?

पाइथागोरस प्रमेय से –

कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = $4^2 + 3^2$

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 16 + 9

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 25

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 5

$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1-\left(\frac{L}{A}\right)^2}{1+\left(\frac{L}{A}\right)^2} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16-9}{16+9} = \frac{7}{25}$

Part - C (भाग–स)

1. $5\frac{\sin 17^o}{\cos 73^o}+2\frac{\cos 67^o}{\sin 23^o}-6\frac{\sin 15^o}{\cos 75^o}$

Ans. $=5\frac{\sin(90^o-73^o)}{\cos 73^o}+2\frac{\cos(90^o-23^o)}{\sin 23^o}-6\frac{\sin(90^o--75^o)}{\cos 75^o}$

$=5\frac{\cos 73^o}{\cos 73^o}+2\frac{\sin 23^o}{\sin 23^o}-6\frac{\cos 75^o}{\cos 75^o}$

$= 5 + 12 - 6$

$= 7 - 6 = 1$

2. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अन्तः कोण हो, तो दिखाइए कि $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$

Ans. $\because A, B$ और C, ΔABC के अन्तः कोण है।

$\therefore A + B + C = 180^o$

$\Rightarrow B + C = 180^o - A$

$\Rightarrow \frac{B+C}{2}=\frac{180^o-A}{2}$

$\Rightarrow \frac{B+C}{2}=90^o=\frac{A}{2}$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sin\left(90^o-\frac{A}{2}\right)$ $\quad\because \sin(90-\theta)=\cos\theta$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$

3. सिद्ध कीजिए –

$(\sin A+\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2 A+\cos^2 A$

Ans. LHS लेने पर –

$(\sin A+\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A+\sec A)^2$

$=\sin^2 A+\operatorname{cosec}^2 A+2.\sin A.\operatorname{cosec} A+\cos^2 A+\sec^2 A+2.\cos A.\sin A$

$=\sin^2 A+\cos^2 A+2.\sin A.\frac{1}{\sin A}+2.\cos A.\frac{1}{\cos A}+\operatorname{cosec}^2 A+\sec^2 A$

$= 1 + 2 + 2 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$

$= 5 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$

$= 5 + 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A$ $\quad\{\because \operatorname{cosec}^2=1+\cot^2 A, \sec^2 A=1+\tan^2 A\}$

$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$, RHS

4. सिद्ध कीजिए –

$$\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$$

Ans. LHS लेने पर –

$$=\frac{\cos A}{(1+\sin A)}+\frac{(1+\sin A)}{\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{2}{\cos A}=2.\frac{1}{\cos A}=2.\sec A$$ RHS

5. सिद्ध कीजिए –

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sec A+\tan A$$

Ans. LHS लेने पर –

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$$

हर का परिमेयकरण करने पर –

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin A)}{(1-\sin A)}\times\frac{(1+\sin A)}{(1-\sin A)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$$ $\because (a-b)(a+b)=a^2b^2$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos A}}$$

$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$= \sec A + \tan A$ RHS

* **अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –**

1. सर्वसमिका $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए –

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

2. निम्नलिखित समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए–

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) + x\cos\theta \cot(90^\circ - \theta) = \sin(90^\circ - \theta)$$

3. $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

अध्याय–9
त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग
अंक = 4

1. किसी मीनार की छाया इसकी ऊंचाई के बराबर हो तो सूर्य का उन्नयन कोण है–

उ. दिया गया है–

$AB = AC$ $\tan\theta = \frac{L}{A} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^o$

$\Rightarrow \theta = 45^o$

2. यदि किसी वृक्ष की छाया उसकी ऊंचाई की $\frac{1}{\sqrt{2}}$ गुना हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण है–

उ. $\tan\theta = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 60^o$

$\Rightarrow \theta = 60^o$

3. एक उर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनपुात $1:\sqrt{3}$ है, तो सूर्य का उन्नयन कोण है–

उ. $\tan\theta = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 30^o$

$\Rightarrow \theta = 30^o$

4. सूर्य के उन्नयन कोण में वृद्धि (0^o से 90^o तक) होने से किसी स्तम्भ की परछाई की लम्बाई में क्या परिवर्तन होता है?

उ. परछाई की लम्बाई कम होती जाएगी।

5. एक चिमनी के आधार से 50 मीटर दूरी पर से उसके शिखर का उन्नयन कोण 60^o है तो चिमनी की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उ. माना चिमनी की ऊंचाई $= hm$

$\tan 60^o = \frac{h}{50}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{50}$

$\Rightarrow h = 50\sqrt{3}$

अतः चिमनी की ऊंचाई $= 50\sqrt{3}$ मीटर

6. किसी समय एक खम्भे की ऊंचाई व परछाई की लम्बाई समान है तो का उन्नवांश कोण लिखिए।

उ. माना सूर्य कोण $= \theta$

$\tan = \frac{L}{A} = \frac{1}{1}$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^o$

$\Rightarrow \theta = 45^o$

7. चित्र के अनुसार x का मान लिखिए।

उ. $\tan 60^o = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{x}{6\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x = 6 \times 3$

$\Rightarrow x = 18$ मीटर

8. दी गई आकृति में कोण θ का मान ज्ञात कीजिए।

उ. $\sin\theta = \frac{L}{k}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{10\sqrt{3}}{20}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin 60^o$

$\Rightarrow \theta = 60^o$

9. 10 मीटर ऊंची एक मीनार के शिखर से पृथ्वी पर एक बिन्दू का अवनमन कोण 30^o है। बिन्दू की मीनार के आधार से दूरी ज्ञात कीजिए।

उ. माना मीनार के आधार पर बिन्दू की दूरी $= x$ मीटर

$\Rightarrow \tan 30^o = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$

$\Rightarrow x = 10\sqrt{3}$ मीटर

10. निम्न चित्र में उन्नयन कोण θ ज्ञात कीजिए।

उ. $\theta = 60^o$

11. भूमि के एक बिन्दू से जो मीनार के पास बिन्दू से 30 मीटर की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30^o है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उ. माना मीनार की ऊंचाई $= h$ मीटर

$$\therefore \tan 30^o = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}h = 30$$

$$\Rightarrow h = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

अतः मीनार की ऊंचाई $= 10\sqrt{3}$ मीटर।

12. एक स्तम्भ के आधार से 40 मीटर दूर स्थित बिन्दू से स्तम्भ के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 60^o है। स्तम्भ की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उ. माना स्तम्भ की ऊंचाई $= h$ मीटर

$$\therefore \tan 60^o = \frac{h}{40}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{40}$$

$$\Rightarrow h = 40\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

अतः स्तम्भ की ऊंचाई $= 40\sqrt{3}$ मीटर

13. एक नदी के ऊपर पुल नदी के किनारे के साथ 45^o का कोण बनाता है, यदि नदी के ऊपर पुल की लम्बाई 150 मीटर हो तब नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उ. माना नदी की चौड़ाई $= x$ मीटर

$$\therefore \cos 45^o = \frac{A}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{150}$$

$$\Rightarrow x = \frac{150 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{150\sqrt{2}}{2} = 75\sqrt{2} \text{ मीटर}$$

अतः नदी की चौड़ाई $= 75\sqrt{2}$ मीटर

14. आंधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30^o का कोण बनाता है। पेड़ के पाद बिन्दू की दूरी, जहां पेड़ का शिखर जमीन को छुता है, 8 मीटर है। पेड़ की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उ. माना पेड़ की कुल लम्बाई $= (h_1 + h_2)$ मीटर

ΔABC में –

$$\tan 30^o = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h_1}{8}$$

$$\Rightarrow \sqrt{B}h_1 = 8$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{8}{\sqrt{3}} \qquad ...1$$

पुनः –

$$\cos 30^o = \frac{A}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{h_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times h_2 = 16$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

अतः पेड़ की कुल ऊंचाई $= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$= 8\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

15. 7 मीटर ऊंचे भवन के शिखर से एक केवल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60^o है और इसके पाद का अवनमन कोण 45^o है। टॉवर की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उ. माना टॉवर की ऊंचाई $= h$ मीटर

ΔABC में:–

$\tan 45^o = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{7}{x}$

$\Rightarrow x = 7$ 1

पुनः ΔADE में:–

$\tan 60^o = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{(h-7)}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3}x = h-7$ 2

समीकरण 1 व 2 से

$\Rightarrow 7\sqrt{3} = h-7$

$\Rightarrow h = 7\sqrt{3}+7$

$\Rightarrow h = 7(\sqrt{3}+1)$ मीटर

16. एक 80 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने–सामने लम्बाई वाले दो खम्भे लगे हुए है। इन दोनों खम्भों के बीच सड़क के एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60^o और 30^o है। खम्भों की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।
17. एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 मीटर अधिक लम्बी हो जाती है। जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण 60^o से घटकर 30^o हो जाता है। मीनार की ऊंचाई ज्ञात करो।
18. समुद्र तल के 75 मीटर ऊंची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 45^o और 60^o है। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर जहाज के ठीक पीछे हो, तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

अध्याय–10

वृत

अंक(प्रश्न) 1(1) + 1(1) + 3(1) = 5(3)

1. किसी वृत की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत को प्रतिच्छेद करती है–
   (1) केवल एक बिन्दु पर
   (2) केवल दो बिन्दुओं पर
   (3) प्रतिच्छेद नहीं करती है
   (4) अन्नत बिन्दुओं पर
2. वृत पर कितनी स्पर्श रेखाएं खिंची जा सकती है–
   (1) एक
   (2) दो
   (3) शुन्य
   (4) अन्नत
3. वृत के एक बिंदु पर कितनी स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती है–
   (1) शुन्य
   (2) केवल एक
   (3) केवल दो
   (4) अन्नत
4. वृत की छेदन रेखा के संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाने की दशा में प्राप्त होती है–
   (1) प्रतिच्छेदी रेखा
   (2) व्यास
   (3) समान्तर रेखा
   (4) स्पर्श रेखा
5. वृत के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या है–
   (1) 1
   (2) 2
   (3) 3
   (4) 0
6. वृत के अन्दर स्थित किसी बिन्दु से खींची जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या है–
   (1) 1
   (2) 2
   (3) 3
   (4) 0
7. वृत पर स्थित किसी बिन्दु से खींची जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या है–
   (1) 1
   (2) 2
   (3) 3
   (4) 0
8. वृत के बाहर स्थित किसी बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण अर्धक पर स्थित होता है–
   (1) वृत का केन्द्र
   (2) वृत का स्पर्श बिन्दु
   (3) वृत का चाप
   (4) वृत की स्पर्श रेखा
9. 7 सेमी व्यास वाले वृत की त्रिज्या होगी–
   (1) 14 सेमी
   (2) 3.5 सेमी
   (3) 4.5 सेमी
   (4) 2 सेमी
10. बाह्य बिन्दु से किसी वृत पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाई होती है–
   (1) समान
   (2) शुन्य
   (3) असमान
   (4) उपर्युक्त में से कोई नहीं

अति लघुतरात्मक प्रश्न

11. वृत को .... बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को छेदन रेखा कहते है।

उ. दो

12. वृत तथा उसकी .... के उभयनिष्ठ बिन्दु को स्पर्श बिन्दु कहते है।

उ. स्पर्श रेखा

13. वृत के अन्तर स्थित बिन्दु से .... स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

उ. शुन्य

14. एक वृत की .... समान्तर स्पर्श रेखाएं हो सकती है।

उ. दो

15. स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु पर खींचा गया अभिलम्ब .... गुजरता है।

उ. केन्द्र से

16. एक बिन्दु Q से O केन्द्र वाली किसी वृत पर PA, PB स्पर्श

रेखाएं परस्पर 70^o के कोण पर झुकी हो तो $\angle AOB$ बराबर है।

उ. $\angle AOB + \angle APB = 180^o$ (सम्पुरक कोण होते है।)

$\angle AOB + 70^o = 180^o$

$\angle AOB = 180^o - 70^o = 110^o$

17. एक बिन्दु Q से एक वृत पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 सेमी तथा बिन्दु Q की केन्द्र से दूरी 25 सेमी है वृत की त्रिज्या है।

उ. त्रिज्या $= \sqrt{(25)^2 - (24)^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7cm$

18. वृत की स्पर्श रेखा बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर .... होती है।

उ. लम्ब

19. दो संकेन्द्रीय वृतों की त्रिज्याएं 5 सेमी तथा 4 सेमी है बड़े वृत की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत को स्पर्श करती हो।

उ. ΔOAP समकोण है

अतः $PA^2 - PO^2 - OA^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16$

$PA^2 = 9$

$PA = 3cm$

$PQ = 2PA = 2 \times 3 = 6cm$

20. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत को बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $QR = 12cm$, PQ की लम्बाई है।

उ. $PQ^2 - OQ^2 - OP^2$ (ΔOPQ समकोण त्रिभुज है)

$PQ^2 = 12^2 - 5^2$

$PQ^2 = 144 - 25$

$PQ^2 = 119$

$PQ + \sqrt{119}$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

21. सिद्ध कीजिए किसी वृत के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएं समान्तर होती हैं।

उ. OA त्रिज्या है और ℓ वृत पर स्पर्श रेखा है।

$\therefore$ $\angle 1 = 90^o$

इसी प्रकार $\angle 2 = 90^o$

अब, $\angle 1 = \angle 2 = 90^o$

परन्तु यह दो समान्तर रेखाओं के एकान्तर कोण है, जब एक तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

$\therefore l \parallel m$

22. सिद्ध कीजिए वृत के किसी बिन्दु पर स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

उ. $OQ > OP$

यह बिंदु P के अतिरिक्त xy के प्रत्येक बिंदु के लिए सत्य है अतः OP बिंदु से xy की न्यूनतम दूरी है। इसलिए $OP \perp xy$

23. सिद्ध कीजिए बाह्य बिन्दु से वृत पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयां बराबर होती है।

उ. ΔOQP और ΔORP में

$\angle OQP = \angle ORP = 90^o$ (प्रमेय से)

$OQ = OR$ (एक ही वृत की त्रिज्याएं)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$\Delta OQP \cong \Delta ORP$ (RHS सर्वांगसमता द्वारा)

$PQ = PR$ $(CPCT)$

24. एक वृत के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है। सिद्ध कीजिए $AB + CD \subset AD + BC$

उ. A बाहर स्थित बिन्दु से AR तथा AS स्पर्श रेखाएं है।

अतः $AR = AS$

$BR = BQ$

$CP = CQ$

$DR = DS$

जोड़ने पर

$(AR + BR) + (CP + DP) = (AS + DS) + (BQ + CQ)$

$B + CD = AD + BC$

25. सिद्ध कीजिए कि वृत के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने–सामने की भुजाएं केन्द्र सम्पूरक कोण अन्तरित करती है।

उ. रचना– $OP, OL, OQ, OM, OR, ON, OS, OT$ को मिलाइए

उत्पत्ति– बाह्य बिन्दु से वृत पर खींची गई स्पर्श रेखा केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती है।

अतः $\angle 2 = \angle 3, \angle 4 = \angle 5, \angle 6 = \angle 7, \angle 8 = \angle 1$ 1

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 = 360^o$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 1 = 360^o$ समी.1से

$2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6) = 360^o$

$(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 5 + \angle 6) = \frac{360^o}{2}$

$\angle POQ + \angle SOR = 180^o$

26. केन्द्र O वाले वृत पर बाह्य बिन्दु A से दो स्पर्श रेखाऐं AB तथा AC खींची गई है सिद्ध कीजिए $\angle BAC = 2\angle OBC$

उ. माना $ABC = \theta$

$AB = AC$ (प्रमेय 10.2 से)

ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^o - \theta)$

$\angle ABC = 90^o - \frac{\theta}{2}$

$\angle OBA = 90^o$

$\angle OBC = 90^o - \left(90^o - \frac{\theta}{2}\right)$

$\angle OBC = \frac{\theta}{2}$

$\angle OBC = \frac{1}{2}\angle BAC$

27. बाह्य बिन्दु A से वृत की दो स्पर्श रेखाएं AB व AC खींची गई है। यदि $\angle BAC = 50^o$ हो, तो $\angle ABC$ का मान लिखिए।

उ. $\angle B + \angle C = 180^o - 50^o$

$= 130^o$

$\angle B = \angle C$ (स्पर्श रेखाएं लम्बाई में समान होती है।)

$\therefore \angle ABC = \frac{130}{2} = 65^o$

28. चित्र मे PA तथा PB एक वृत की स्पर्श रेखाएं है वृत पर एक बिन्दु m हो तो सिद्ध कीजिए कि $PL + LM = PN + NM$

उ. $PA = PB$ (स्पर्श रेखाएं समान होती है)

या $PL + LA = PN + NB$ 1

$LA = LM$ 2

इसी प्रकार $NB = NM$ 3

1,2,3 से $PL + LM = PN + NM$

29. चित्र में वृत का केन्द्र O है और स्पर्श रेखाएं PA और PB हो तो सिद्ध कीजिए कि $AOBP$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उ. स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्बवत होती है।

अतः $OA \perp AP$ और $OB \perp BP$

अतः $\angle OAP = 90^o$ और $\angle OBP = 90^o$

$\angle OAP + \angle OBP = 90^o + 90^o$

$\angle OAP + \angle OBP = 180^o$ 1

चतुर्भुज $OAPB$ के कोणों का योग 360^o होगा।

अतः $\angle APB + \angle BOA = 360^o - 180^o$

$\angle APB + \angle BOA = 180^o$ 2

अतः समी. 1 व 2 से $\square AOBP$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

30. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का सम्पूरक होता है।

उ. स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्बवत होती है।

अतः $\angle PQO = \angle PRO = 90^o$

या $\angle PQO + \angle PRO = 90^o + 90^o = 180^o$ 1

$\square PQOR$ में

$\angle PQO + \angle PRO + \angle QOR + \angle QPR = 360^o$

$180^o + \angle QOR + \angle QPR = 360^o$

$\angle QOR + \angle QPR = 180^o$

अध्याय–11
रचनाएँ

अंक (प्रश्न) 1(1) + 1(1) + 4(2) = 6(4))

अभ्यास प्रश्न

1. किस स्थिति में त्रिभुज की रचना नहीं की जा सकती है–
   (1) यदि तीनों कोण दिए हो (2) यदि तीन भुजाएं दी हो
   (3) दो कोण व मध्य की भुजा दी हो (4) दो भुजाएं व उनके मध्य का कोण दिया हो (1)
2. एक रेखाखण्ड को दिए हुए अनुपात में विभाजित करने के लिए रेखाखण्ड के एक बिन्दु पर बनाया जाता है –
   (1) वृहत कोण (2) अधिक कोण (3) समकोण (4) न्यूनकोण (4)
3. वह रेखाखण्ड जो वृत के केन्द्र से गुजरता है और जिसके दोनों सिरे वृत पर स्थित हो, कहलाता है–
   (1) त्रिज्या (2) व्यास (3) त्रिज्यखण्ड (4) वृत खण्ड (2)
4. ऐसी सरल रेखा जो वृत की परिधि को केवल एक ही बिन्दु पर स्पर्या करती है, कहते है–
   (1) छेदन रेखा (2) स्पर्श रेखा (3) समद्विबाहु रेखा (4) विभक्त रेखा (2)
5. वृत के बाहर स्थित बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाओं की संख्या हो सकती है–
   (1) 2 (2) 3 (3) 0 (4) 4 (1)
6. दिए गए चित्र में स्पर्श रेखा है–
   (1) AB (2) PQ (3) RM (4) OT (1)
7. दिए गए चित्र में स्पर्श रेखाओं की संख्या है–
   (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (2)
8. एक वृत में अधिक से अधिक, बाहर स्थित किसी बिन्दु से खींची जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या क्रमशः है।
   (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) अनन्त (4)
9. वृत पर स्थित, अन्दर स्थित, बाहर स्थित किसी बिन्दु से खींची जाने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या क्रमशः है।
   (1) 0, 1, 2 (2) 1, 0, 2 (3) 2, 1, 0 (4) 2, 0, 1 (2)
10. एक वृत की समान्तर स्पर्श रेखाएं हो सकती है–
   (1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) अनन्त (2)

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न–

11. दो वृत एक दूसरे को अन्तः स्पर्श करते है, तो उनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या लिखिए।

हलः एक

12. एक वृत में अधिक से अधिक किसी छेदन रेखाएं खींची जा सकती है।

हलः अनन्त छेदन रेखाएं

13. वृत के अन्दर स्थित किसी बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती है।

हलः शुन्य

14. वृत की छेदन रेखा PQ है। छेदन रेखा PQ के स्पर्श रेखा बनने का प्रतिबंध लिखिए।

हलः जब बिन्दु P व Q सम्पाती हो अर्थात दोनों एक ही बिन्दु हो तो छेदन रेखा स्पर्श रेखा कहलाती है।

15. वृत की स्पर्श रेखा व त्रिज्या में क्या सम्बंध होता है?

हलः वृत के स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु पर खींची गई त्रिज्या एक दूसरे पर लम्ब होती है।

16. किसी बाहय बिन्दु से वृत पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई 12 सेमी है यदि वृत की त्रिज्या 5 सेमी है तो केन्द्र से बाहय बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः दूरी $=\sqrt{(12)^2+(5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ सेमी

17. 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत पर स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

हलः

18. 7.6 सेमी लम्बा एक रेखाखण्ड खींचिए और इसे 5 : 8 अनुपात में विभाजित कीजिए।

हलः

19. 4 सेमी, 5 सेमी, 6 सेमी भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए।

हलः

20. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 8 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी हो तथा समद्विबाहु त्रिभुज हो।

हलः

लघुत्तरात्मक प्रश्न

21. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $BC=7cm, \angle B=45^o, \angle A=105^o$ हो फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं ΔABC की संगत भुजाओं की दुगुनी हो।

22. 5 cm, 6 cm, 7 cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं दिये त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{7}{5}$ गुनी हो।

23. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं (कर्ण के अतिरिक्त) 4 सेमी तथा 3 सेमी लम्बाई की हो। फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएं दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी हो।

24. 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत खींचिए। केन्द्र से 10 सेमी दूर स्थित एक बिंदु से वृत पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लम्बाईयां लिजिए।

25. 4 सेमी त्रिज्या के एक वृत पर 6 सेमी त्रिज्या के एक संकेन्द्रीय वृत के किसी बिन्दु से एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

26. 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत खींचिए। इसके किसी बढ़ाए गए व्यास पर केन्द्र से 7 सेमी की दुरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए। इन दोनों बिन्दुओं से वृत पर स्पर्श रेखाएं खींचिए।

27. 5 सेमी त्रिज्या के एक वृत पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएं खींचिए, जो परस्पर 60^o के कोण पर झुकी हो।

28. माना ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $AB = 6cm, BC = 8cm$ तथा $\angle B = 90^o$ है B से AC पर BD लम्ब है, बिन्दुओं B, C, D से होकर जाने वाले वृत खींचा गया है A से इस वृत पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

29. 8 सेमी लम्बा एक रेखाखण्ड AB खींचिए। A को केन्द्र मान कर 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत तथा B को केन्द्र लेकर 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत खींचिए। प्रत्येक वृत पर दूसरे वृत के केन्द्र से स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

अध्याय–12

वृतों से संबंधित क्षेत्रफल

अंक(प्रश्न) 1(1) + 1(1) + 2(1) = 4(3)

1. त्रिज्या r वाले वृत परिधि $= 2\pi r$
2. त्रिज्या r वाले वृत का क्षेत्रफल $= \pi r^2$
3. त्रिज्या r वाले वृत के एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण अंशों में θ है के संग चाप की लम्बाइ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ होती है।
4. त्रिज्या r वाले वृत के एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण अंशों में θ है, का क्षेत्रफल $\frac{\theta}{360} \times rr^2$ होता है।
5. एक वृतखंड का क्षेत्रफल $=$ संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल
6. एक वृत के प्रत्येक चतुर्थांश के कोण का मान होता है–
   (1) 30^o
   (2) 45^o
   (3) 60^o
   (4) 90^o
7. यदि एक वृत का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है वो उस वृत की त्रिज्या है।
   (1) 2 मात्रक
   (2) π मात्रक
   (3) 4 मात्रक
   (4) 7 मात्रक
8. त्रिज्या R वाले वृत के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण a है। निम्नलिखित है–
   (1) $2\pi r$
   (2) $\frac{\pi r^2 a}{360^o}$
   (3) πr^2
   (4) इनमें से कोई नहीं
9. एक वृत की त्रिज्या 7 सेमी है, तो उसका क्षेत्रफल है।
   (1) 154 वर्ग सेमी
   (2) 308 वर्ग सेमी
   (3) 44 वर्ग सेमी
   (4) 606 वर्ग सेमी
10. एक वृत परिधि 176 सेमी है तो उसकी त्रिज्या है।
   (1) 21 सेमी
   (2) 14 सेमी
   (3) 28 सेमी
   (4) 7 सेमी
11. दो वृतों की परिधियों का अनुपात 3 : 2 है, तब उनकी त्रिज्याओं का अनुपात होगा–
   (1) 2 : 3
   (2) 3 : 2
   (3) 9 : 4
   (4) 4 : 9
12. दो वृतों के क्षेत्रफलों का अनुपात 9 : 16 है इसकी त्रिज्याओं का अनुपात होगा।
   (1) 3 : 4
   (2) 4 : 3
   (3) 9 : 16
   (4) 16 : 9
13. यदि एक वृत की परिधि और एक वर्ग का परिमाप बराबर है तो–
   (1) वृत का क्षेत्रफल $=$ वर्ग का क्षेत्रफल
   (2) वृत का क्षेत्रफल $>$ वर्ग का क्षेत्रफल
   (3) वृत का क्षेत्रफल $<$ वर्ग का क्षेत्रफल
   (4) निश्रित नहीं कहा जा सकता है।
14. 28 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्रीय कोण 45^o है–
   (1) 250 सेमी²
   (2) 308 सेमी²
   (3) 376 सेमी²
   (4) 404 सेमी²
15. 6 सेमी भुजा वाले एक वर्ग के अन्तर्गत खींचे जा सकने वाले वृत का क्षेत्रफल है।
   (1) 36π सेमी² (2) 18π सेमी²
   (3) 12π सेमी² **(4)** 9π सेमी²

अति लघुतरात्मक प्रश्न

16. 21 सेमी त्रिज्या के वृत से काटे गये त्रिज्यखण्ड का कोण 60^o है त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उ. त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2 \theta}{360^o}$

$$= \frac{22 \times 21 \times 21 \times 60^o}{7 \times 360^o} = 231 \text{ वर्ग सेमी}$$

17. उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके चाप की लम्बाई 10 सेमी और त्रिज्या 6 सेमी है।

उ. यहां त्रिज्या (r) = 6 सेमी चाप $(L)=10$ सेमी

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times L\times r$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 6=30$ सेमी²

18. यदि एक वृत के दीर्घ त्रिज्यखण्ड का कोण 250° है तो लघु त्रिज्यखण्ड का कोण ज्ञात कीजिए।

उ. लघु त्रिज्यखण्ड का कोण $=360^\circ-$ दीर्घ त्रिज्यखण्ड का कोण

$=360^\circ-250^\circ=110^\circ$

19. त्रिज्यखण्ड r वाले वृत के एक त्रिज्यखण्ड का कोण अंशों में θ है, तो संगत चाप की लम्बाई का सूत्र लिखिए।

उ. कोण θ वाले त्रिज्यखण्ड के संगत चाप की लम्बाई$=\frac{\theta}{360^\circ}\times 2\pi r$

$=\frac{\pi r\theta}{180^\circ}$

19. यदि एक वृत का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है तो वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उ. माना वृत की त्रिज्या $=r$ है।

प्रश्नानुसार वृत का परिमाप = वृत का क्षेत्रफल

$2\pi r=\pi r^2$

$r=2$ मात्रक

20. यदि एक वृत त्रिज्या 14 सेमी हो, तो वृत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उ. यहां वृत की त्रिज्या $(r)=14$ सेमी

वृत का क्षेत्रफल $=\pi r^2$

$=\frac{22}{7}\times(14)^2=\frac{22}{7}\times 14\times 14$

$=22\times 2\times 14=616$ वर्ग सेमी

21. 44 सेमी परिधि वाले वृत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

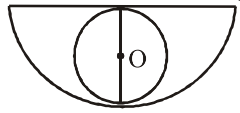
उ. प्रश्नानुसार परिधि $=44$ सेमी

$r=\frac{44\times 7}{2\times 22}=7$ सेमी

वृत का क्षेत्रफल $=\pi r^2=\frac{22}{7}\times 7\times 7$

$=154$ सेमी

22. चित्र में अर्द्धवृत की त्रिज्या 7 सेमी है। अर्द्धवृत में बने वृत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उ. दी गई आकृति में–

अर्द्धवृत की त्रिज्या, अर्द्धवृत के अन्दर वृत के व्यास के बराबर है।

अर्थात् अन्दर बने वृत की त्रिज्या $(r)=\frac{PQ}{2}$

$r=\frac{7}{2}$ सेमी $=3.5$ सेमी

अन्दर बने वृत का क्षेत्रफल $=\pi r^2$

$=\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5$ सेमी $=38.5$ सेमी²

23. दो वृतों की त्रिज्या क्रमशः 19 सेमी और 9 सेमी है। उस वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों की परिधियों के योग के बराबर है।

उ. प्रश्नानुसार, पहले का वृत क त्रिज्या $(r_1)=19$ सेमी

तथा दुसरे वृत की त्रिज्या $(r_2)=9$ सेमी

पहले वृत की परिधि + दुसरे वृत की परिधि = तीसरे वृत की परिधि

$2\pi r_1+2\pi r_2=2\pi R$

$2\pi[r_1+r_2]=2\pi R$

$19+9=R$

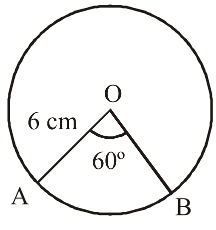
$R=28$

अतः तीसरे वृत की त्रिज्या $(R)=28$ सेमी

24. 6 सेमी त्रिज्या वाजे एक वृत के एक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसका कोण 60° है।

उ. प्रश्नानुसार वृत के त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या$(R)=6$ सेमी

केन्द्रीय कोण $(O)=60^\circ$



$\because$ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल$=\frac{\pi R^2 O}{360^\circ}$

$=\frac{22}{7}\times\frac{6\times6\times60^o}{360^o}$

$=\frac{132}{7}$ सेमी² $=18.857$ सेमी²

अतः त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $=\frac{132}{7}$ या 18.86 सेमी² (लगभग)

25. एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लम्बाई 14 सेमी है उस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उ. प्रश्नानुसार मिनट की सुई की लम्बाई = वृत की त्रिज्या $(R)=14$ सेमी

$\therefore$ हम जानते है कि,

60 मिनट $=60'=360^o$

1 मिनट $=1'=\frac{360}{60}=60^o$

5 मिनट $=5'=6^o\times5=30^o$

अतः सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल

$=\frac{\pi R^2\theta}{360}$

$=\frac{22}{7}\times14\times14\times\frac{30^o}{360^o}$

$\because R=14$ सेमी बौर $\theta=30^o$

$=\frac{1}{12}\times22\times28$

$=\frac{154}{3}$ सेमी²

अतः मिनट की सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल $=\frac{154}{3}$ सेमी² होगी।

26. जहाजों की समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस 80^o कोण वाले एक त्रिज्यखण्ड में 16.5 किमी की दुरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलता है। समुद्र में उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके। ($\pi=3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

उ. त्रिज्यखण्ड कोण $(\theta)=80^o$

त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या $(R)=16.5$ किमी

समुद्र के उस भाग को क्षेत्रफल जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके अर्थात् त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$=\frac{\pi R^2\theta}{360^o}$

$=\frac{3.14\times16.5\times16.5\times80^o}{360^o}$

$=189.97$ किमी²

27. आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केन्द्र O वाले दोनों संकेन्द्रीय वृतों की त्रिज्याएं क्रमशः 7 सेमी और 14 सेमी है तब $\angle AOC=40^o$ है।

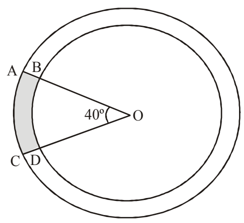
उ. प्रश्नानुसार, छोटे वृत की त्रिज्या $(r)=7$ सेमी

बड़े वृत की त्रिज्या $(R)=14$ सेमी

केन्द्रीय कोण $\angle AOC(\theta)=40^o$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= बड़े वृत OAC का क्षेत्रफल – छोटे वृतखण्ड OBD का क्षेत्रफल



$=\frac{\pi R^2\theta}{360^o}-\frac{\pi r^2\theta}{360^o}$

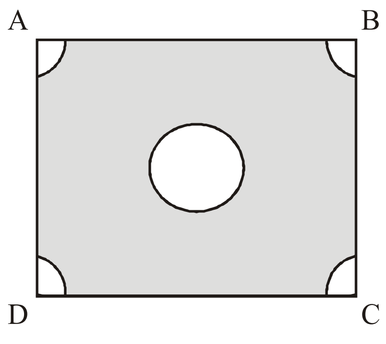
$=\frac{22}{7}\times\frac{40^o}{360^o}\times\left[14^2-7^2\right]$

$=\frac{22}{63}[196-49]$

$=\frac{22}{63}\times147=\frac{22}{3}\times7$

$=\frac{154}{3}$ सेमी²

28. भुजा 4 सेमी वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1 सेमी त्रिज्या वाले वृत का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2 सेमी व्यास का एक वृत भी काटा गया है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उ. प्रश्नानुसार

काटे गए प्रत्येक अर्द्धवर्त की त्रिज्या $(r)=1$ सेमी

वृत का व्यास $(R)=2$ सेमी

वृत की त्रिज्या $(R)=1$ सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2

$=(4)^2=16$ सेमी^{2}

चतुर्थांशों का क्षेत्रफल $=4\left[\frac{\pi R^2\theta}{360^o}\right]$

$=\frac{4\times 90^o}{360^o}\times\frac{22}{7}\times 1\times 1$

$=1\times\frac{22}{7}\times 1\times 1$

$=\frac{22}{7}$ सेमी^{2}

$\therefore$ वृत का क्षेत्रफल $\therefore=\pi R^2$

$=\frac{22}{7}\times 1\times 1=\frac{22}{7}$

($\because$ बीच वाले वृत की त्रिज्या = 1 सेमी है)

$\therefore$ अभीष्ट छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल – 4 चतुर्थांशों का क्षेत्रफल – वृत का क्षेत्रफल

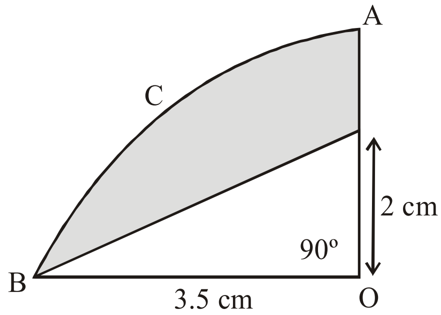
$=16-\left[\frac{22}{7}+\frac{22}{7}\right]$ सेमी^{2}

$=\frac{16}{1}-\frac{44}{7}$ सेमी^{2}

$=\frac{112-44}{7}=\frac{68}{7}$ सेमी^{2}

29. आकृति में, $OACB$ केन्द्र O और त्रिज्या 3.5 सेमी वाले एक वृत के चतुर्थांश है। यदि $OD=2$ सेमी है। तो निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए–

1. चतुर्थांश $OACB$
2. छायांकित भाग



उ. प्रश्नानुसार, चतुर्थांश की त्रिज्या $(R)=3.5$ सेमी

त्रिज्यखण्ड का कोण $(\theta)=90^o$

$OD=2$ सेमी

1. चतुर्थांश $OACB$ का क्षेत्रफल $=\frac{\pi R^2\theta}{360^o}$

$=\frac{22}{7}\times\frac{3.5\times 3.5\times 90^o}{360^o}$

$=\frac{77}{8}$ सेमी^{2}

2. ΔODB का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊंचाई

$=\frac{1}{2}\times 3.5\times 2=3.5$ सेमी^{2}

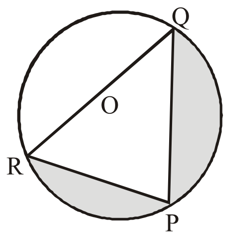
$\therefore$ छायांकित क्षेत्रफल = चतुर्थांश $OACB$ का क्षेत्रफल – $\Delta AOCB$ का क्षेत्रफल

$=\frac{77}{8}-3.5$

$=\frac{77-28}{8}=\frac{49}{8}$ सेमी^{2}

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल $\frac{49}{8}$ सेमी^{2} या 6.125 सेमी^{2}

30. किसी कार के प्रत्येक पहिए का व्यास 80 सेमी है। यदि यह कार 66 किमी प्रति घण्टे की चाल से चल रही है। तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाता है।
31. त्रिज्या 21 सेमी वाले वृत का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है तो चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
32. त्रिज्या 12 सेमी वाले एक वृत की कोई जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अन्तरित करती है। संगत वृतखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)
33. आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $PQ = 24$ सेमी, $PQ = 7$ सेमी तथा O वृत का केन्द्र है।



34. एक घड़ी के मिनट की सुई जिसकी लम्बाई 14 सेमी है। इस सुई के द्वारा 25 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
35. त्रिज्या 21 सेमी वाले वृत का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है, तो संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
36. एक वृत का चाप केन्द्र पर 45° का कोण अन्तरित करता है। यदि इसके लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल 77 सेमी^{2} है तो वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
37. त्रिज्या 14 सेमी वाले वृत का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है। ज्ञात कीजिएः संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृतखण्ड का क्षेत्रफल।
38. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण अन्तरित करती है। निम्नलिखित का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिएः संगक लघु वृतखण्ड

अध्याय 13

पृष्ठीय क्षेत्रफल ओर आयतन

अंक(प्रश्न) $1(1)+2(1)+2(1)=5(3)$

घनाभ

घनाभ का क्षेत्रफल

$=2($लम्बाई × चौडाई + चौडाई × ऊंचाई + ऊंचाई × लम्बाई$)$

घनाभ का आयतन

= लम्बाई × चौडाई × चौडाई

घनाभ का विकर्ण

$=\sqrt{(\text{लम्बाई})^2+(\text{चौडाई})^2+(\text{ऊंचाई})^2}$

घन

* घन का क्षेत्रफल $=6\times(\text{भुजा})^2$
* घन का आयतन $=(\text{भुजा})^3$
* घन का विकर्ण $=\sqrt{3}\times$ भुजा

शंकु

* शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi rl$
* शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi r(r+l)$
* शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

जहां

$l=$ तिर्यक ऊंचाई $\quad l=\sqrt{h^2+r^2}$

$r=$ त्रिज्या

$h=$ ऊंचाई

बेलन

* बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi rh$
* बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi r(r+h)$
* बेलन का आयतन $=\pi r^2 h$

गोला

* गोले का क्षेत्रफल $=4\pi r^2$
* अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi r^2$
* अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=3\pi r^2$
* गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3$
* अर्द्ध गोले का आयतन $=\frac{2}{3}\pi r^3$

शंकु का छिन्नक

* शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi(r_1+r_2)l$

जहां $l=\sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

$l=$ छिन्नक की तिर्यक ऊंचाई

r_1 तथा r_2 छिन्नक के दोनों वृतीय सिरों की त्रिज्याएं

* शंकु के छिन्नक का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi(r_1+r_2)l+\pi(r_1^2+r_2^2)$
* शंकु के छिन्नक का आयतन $=\frac{1}{3}\pi\left(r_1^2+r_2^2+r_1r_2\right)h$

1. अलग–अलग त्रिज्या वाले तीन ठोस गोलो को पिघलाकर एक नया ठोस गोला बनाया जाता है। इस नये गोले का आयतन
(1) तीनों गोलों के आयतन के योग से कम होगा।
(2) तीनों गोलों के आयतन के योग से अधिक होगा।
(3) तीनों गोलों के आयतन के योग के समान होगा।
(4) तीनों गोलों के आयतन के योग से कोई संबंध नहीं होगा
(3)

2. शंकु के छिन्नक में वृताकार भाग की संख्या होती है–
(1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4 (2)

3. भुजा 7 सेमी वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्द्धगोला रखा हुआ है। अर्द्धगोले का अधिकतम व्यास हो सकता है।
(1) 7 सेमी
(2) 14 सेमी
(3) 21 सेमी
(4) 28 सेमी (1)

4. एक शंकु की त्रिज्या 6 सेमी व ऊंचाई 8 सेमी है। शंकु की तिर्यक ऊंचाई होगी–
(1) 6 सेमी
(2) 8 सेमी
(3) 10 सेमी
(4) 14 सेमी (3)

5. यदि एक बेलन की ऊंचाई 11 सेमी तथा उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 सेमी^{2} है तो बेलन की त्रिज्या होगी।
(1) 10 सेमी
(2) 11 सेमी

(3) 12 सेमी

(4) 14 सेमी (4)

6. एक बेलनाकार बोतल का व्यास 10 सेमी है। यदि उसमें 14 सेमी ऊंचाई तक द्रव भरा हो तो द्रव का आयतन है

(1) 1200 घन सेमी

(2) 1100 घन सेमी

(3) 1500 घन सेमी

(4) 1150 घन सेमी (2)

7. एक ठोस अर्द्ध गोले की त्रिज्या 7 सेमी है तो इसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा।

(1) 336 वर्ग सेमी

(2) 462 वर्ग सेमी

(3) 256 वर्ग सेमी

(4) 149 वर्ग सेमी (2)

8. दो बेलनों के आधारों की त्रिज्याओं में 2 : 3 का अनुपात है और उनकी ऊंचाई 5 : 3 का अनुपात है। उनके आयतनों में अनुपात है–

(1) 7 : 6

(2) 10 : 9

(3) 4 : 9

(4) 20 : 27 (4)

9. किसी घन का आयतन 125 सेमी^{2} है। इसके एक फलक का क्षेत्रफल है–

(1) 25 सेमी^{2}

(2) 30 सेमी^{2}

(3) 5 सेमी^{2}

(4) 20 सेमी^{2} (1)

10. 12π घन सेमी आयतन वाले गोले की त्रिज्या (सेमी. में) है–

(1) 3

(2) $3\sqrt{3}$

(3) $3^{\frac{2}{3}}$

(4) $3^{\frac{1}{2}}$ (3)

11. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात है–

(1) 3 : 4

(2) 4 : 3

(3) 9 : 16

(4) 16 : 9 (4)

12. दो बेलनों का आयतन बराबर है तथा उनकी ऊंचाइयों का अनुपात 1 : 3 है। उनकी त्रिज्याओं का अनुपात होगा–

(1) 1 : 3

(2) 3 : 1

(3) $\sqrt{3}:3$

(4) $3:\sqrt{3}$ (4)

13. एक घनाभ की माप 12 सेमी $\times$ 9 सेमी $\times$ 6 सेमी है इसे पिघलाकर 3 सेमी भुजा वाले कितने घन बनाये जा सकते है–

(1) 20

(2) 27

(3) 24

(4) 30 (3)

1. कोई बर्तन एक खोखले अर्द्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्द्धगोले का व्यास 14 सेमी है। और इस बर्तन की कुल ऊंचाई 13 सेमी है। इस बर्तन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उ. यहां अर्द्धगोले का व्यास $=$ बेलन का व्यास

$=14$ सेमी

$2R=14$ सेमी

अर्द्धगोले की त्रिज्या $(R)=7$ सेमी

बर्तन की कुल ऊंचाई $=13$ सेमी

$\therefore$ बेलन की ऊंचाई $=(13-7)=6$ सेमी

बर्तन का आन्तरकि पृष्ठीय क्षेत्रफल $=$ बेलन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

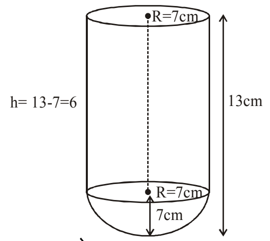
$=2\pi RH+2\pi R^2$

$=2\pi R[H+R]$

$=2\times\frac{22}{7}\times 7(6+7)$

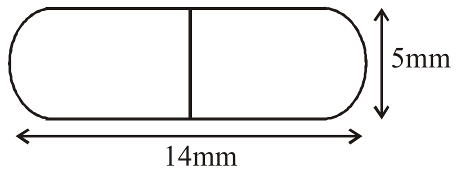
$=44\times 13$

$=572$ सेमी^{2}

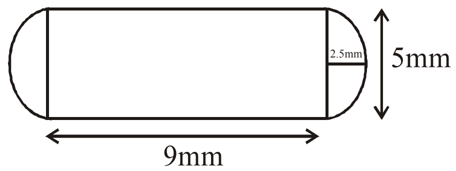


अतः बर्तन का कुल आन्तरिक पृष्ठभ्य क्षेत्रफल का मान $=572$ सेमी^{2}

2. दवा का एक कैप्सूल एक बेलन के आकार का है। जिसके दोनों छोरो पर एक–एक अर्द्धगोला लगा हुआ है। पुरे कैप्सुल की लम्बाई 14 एमएम है। और उसका व्यास 5 एमएम है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा–



उ. यहां



कैप्सूल का व्यास $=$ अर्द्धगोले का व्यास

$=$ बेलन का व्यास $=$ 5 mm

$\therefore\ 2R = 5mm$

$$R = \frac{5}{2}mm$$

कैप्सूल की आन्तरिक लम्बाई $=14mm$

बेलनाकार भाग की ऊंचाई $=\left(14-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)mm$

$=(14-5)mm$

$H = 9mm$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल $=$ बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$=2\pi RH + 2(2\pi R^2)$

$=2\pi RH + 4\pi R^2$

$=2\pi R[H+2R]$

$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{2}\left[9+2\left(\frac{5}{2}\right)\right]$

$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{2}[9+5]$

$=\frac{22}{7}\times 5\times 14$

$=22\times 5\times 2 = 220mm^2$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल $=220mm^2$

3. एक ठोस एक अर्द्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएं 1 सेमी है तथा शंकु की ऊंचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।

उ. यहां शंकु की त्रिज्या $=$ अर्द्धगोले की त्रिज्या

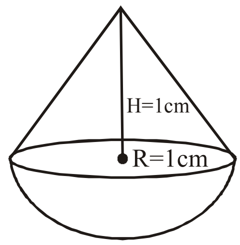
$=$ 1 सेमी

$R = 1$ सेमी

और शंकु की ऊंचाई $(H) = 1$ सेमी

ठोस का आयतन $=$ शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन

$=\frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3$



$=\frac{1}{3}\pi R^2[H+2R]$

$=\frac{1}{3}\pi\times 1[1+2\times 1]$

$=\frac{1}{3}\pi\times 3 = \frac{3\pi}{3}$

$=\pi$ सेमी^{3}

$\therefore$ ठोस का आयतन $=\pi$ सेमी^{3}

4. एक कलमदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना है जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गढ्ढे बने हुए है। घनाभ की विमाएं $15cm\times 10cm\times 3.5cm$ है। प्रत्येक गढ्ढे की त्रिज्या 0.5 सेमी है और गहराई 1.4 सेमी है। पूरे कलमदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए।

उ. प्रश्नानुसार

घनाभ की लम्बाई $(L) = 15$ सेमी

घनाभ की चौड़ाई $(B) = 10$ सेमी

घनाभ की ऊंचाई $(H) = 3.5$ सेमी

शंक्वाकार गढ्ढे की त्रिज्या $(r) = 0.5$ सेमी

शंक्वाकार गढ्ढे की ऊंचाई $(h) = 1.4$ सेमी

कलमदान में लकड़ी की आयतन $=$ घनाभ का आयतन − 4 [शंकु का आयतन]

$=LBH - 4\left[\frac{1}{3}\pi r^2 h\right]$

$=15\times 10\times .35 - \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 0.5\times 0.15\times 1.4$

$=\frac{15\times 10\times 35}{10} - \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{10}\times\frac{14}{10}\times\frac{5}{10}$

$=\left(15\times 35 - \frac{22}{3\times 5}\right)$ सेमी^{2}

$=(525-1.466)$ सेमी^{2}

$=525.533$ सेमी^{3}

अतः पूरे कलमदान में लकड़ी का आयतन $=525.533$ सेमी^{3}

5. त्रिज्या 4.2 सेमी वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 सेमी वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उ. प्रश्नानुसार

गोले की त्रिज्या $(r) = 4.2$ सेमी

बेलन की त्रिज्या $(R) = 6$ सेमी

बेलन की ऊंचाई $(H) = H$ सेमी

मान लो,

डालने पर आयतन पहले जितना ही रहता है।

अर्थात् यहां गोले का आयतन $=$ बेलन का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi R^2 H$$

$$\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.2\times 4.2\times 4.2 = \frac{22}{7}\times 6\times 6\times H$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{42}{10}\times\frac{42}{10}\times\frac{42}{10}\times\frac{1}{6\times 6}$$

$$= \frac{2744}{1000} = 2.744 \text{ सेमी}$$

$\therefore$ बेलन की ऊंचाई $(H) \cong 2.74$ सेमी

6. व्यास 7 मीटर वाला 20 मीटर गहरा एक कुआं खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी की समान रूप से फैलाकर 22 मीटर $\times$ 14 मीटर वाला एक चबूतरा बनाया गया है। इस चबूतरे की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

उ. प्रश्नानुसार,

कुएं का व्यास $= 7$ मीटर

कुएं (बेलन) की त्रिज्या $R = \frac{7}{2}$ मीटर

कुएं की ऊंचाई $H_1 = 20$ मीटर

चबूतरे की लम्बाई $(L) = 22$ मीटर

चबूतरे की चौड़ाई $(B) = 14$ मीटर

माना कि,

चबूतरे की ऊंचाई $= H_2$ मीटर

कुएं में से निकाली गई मिट्टी का आयतन $=$ बनाएं गए चबूतरे का आयतन

$$\pi R^2 H = L\times B\times H_2$$

$$\therefore H = \frac{\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times 20}{22\times 14}$$

$H = 2.5$ मीटर

$\therefore$ चबूतरे की ऊंचाई $(H_2) = 2.5$ मीटर

7. पानी पीने वाला एक 14 सेमी ऊंचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृताकार सिरों के व्यास 4 सेमी और 2 सेमी है। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

उ. प्रश्नानुसार,

ऊपरी सिरे की त्रिज्या $(R) = 2$ सेमी

निचले सिरे की त्रिज्या $(r) = 1$ सेमी

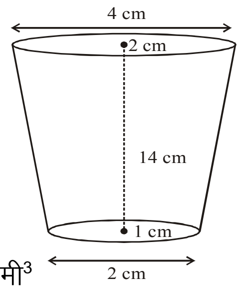
गिलास की ऊंचाई $(H) = 14$ सेमी

छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi\left[R^2 + r^2 + Rr\right]H$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\left[(2)^2 + (1)^2 + 2\times 1\right]14$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\left[4+1+2\right]14$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times 7\times 14$$



अतः गिलास की धारिता $= 102\frac{2}{3}$ सेमी^{3}

8. एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊंचाई 4 सेमी है तथा इसके वृतीय सिरे के परिमाप (परिधियां) 18 सेमी और 6 सेमी है। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उ. छिन्नक की तिर्यक ऊंचाई $(l) = 4$ सेमी मान कि ऊपरी सिरे और निचले सिरे को त्रिज्या R और r है।

ऊपरी सिरे की परिधि $= 18$ सेमी

$$2\pi R = 18$$

$$R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi} \text{ सेमी}$$

निचले सिरे की परिधि $= 6$ सेमी

$$2\pi r = 6 \text{ सेमी}$$

$$r = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \text{ सेमी}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $\pi\left[R+r\right]l$

$$= h\left[\frac{9+3}{\pi}\right]4$$

$$= 12\times 4$$

$= 48$ सेमी^{2}

अतः छिन्न का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 48$ सेमी^{2}

9. 7 सेमी व्यास वाला एक गोला पानी से आंशिक भरे एक बेलनाकार बर्तन में डाला जाता है। बर्तन के आधार का व्यास 14 सेमी है। यदि गोला पूर्णतया पानी में डूबा हो, तो पानी का स्तर कितना ऊपर उठ जायेगा।

उ. गोले का व्यास $=7$ सेमी

गोले की त्रिज्या $=\frac{7}{2}=3.5$ सेमी

गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3$

$=\frac{4}{3}\pi\times(3.5)^3$ घन सेमी

पुनः बेलनाकार बर्तन के आधार का व्यास $=14$ सेमी

त्रिज्या $(r)=\frac{14}{2}=7$ सेमी

बेलन का आयतन $=\pi r^2 h$

$=\pi(7)^2\times h$

समीकरा 1 तथा 2 को बराबर करने पर

$=\pi(7)^2\times h=\frac{4}{3}\pi\times(3.5)^3$

$h=\frac{4}{3}\times\frac{3.5\times3.5\times3.5}{7\times7}$

$=\frac{4}{3}\times0.5\times0.5\times3.5$

$=\frac{3.5}{3.6}=\frac{7}{6}$ सेमी

अतः गोला डालने पर पानी का स्तर $\frac{7}{6}$ सेमी ऊपर उठ जायेगा।

10. 1 सेमी त्रिज्या और 2 सेमी लम्बी तांबे की एक छड़ को एक समान चौड़ाई वाले 18 मीटर लम्बे एक तार के रूप में बदला जाता है। तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।

उ. छड़ का आयतन $=\pi\times(1)^2\times2cm^3=2\pi cm^3$

समान आयतन वाले तार की लम्बाई $=18m=1800cm$

यदि तार के अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या r है तो तार का आयतन

$=\pi\times r^2\times1800cm^2$

अतः $\pi\times r^2\times1800=2\pi$ (दोनों का आयतन बराबर होगा)

अतः तार के अनुप्रस्थ काट का व्यास अर्थात् मोटाई

$=2\times\frac{1}{30}cm=\frac{1}{5}cm$

11. क्रमशः 6 सेमी, 8 सेमी और 10 सेमी त्रिज्याओं वाले धातु के तीन ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उ. पहले गोले की त्रिज्या $(r_1)=6cm$

दुसरे गोले की त्रिज्या $(r_2)=8cm$

तीसरे गोले की त्रिज्या $(r_3)=10cm$

माना कि बने गोले की त्रिज्या $=Rcm$

तीनों गोले का आयतन $=$ बड़े गोले का आयतन

$\frac{4}{3}\pi r_1^3+\frac{4}{3}\pi r_2^3+\frac{4}{3}\pi r_3^3=\frac{4}{3}\pi R^3$

$\frac{4}{3}\pi\left[(6)^3+(8)^3+(10)^3\right]=\frac{4}{3}\pi R^3$

$R^3=\frac{\frac{4}{3}\pi[216+512+1000]}{\frac{4}{3}\pi}=1728$

$R=\sqrt[3]{1728}$

$=\sqrt[3]{2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3}$

$=2\times2\times3=12cm$

अतः बड़े गोले की त्रिज्या $=12cm$

1. पानी से पूरी भरी हुई एक अर्द्धगोलाकार टंकी की एक पाइप द्वारा $3\frac{4}{7}$ लीटर प्रति सैकण्ड की दर से खाली किया जाता है। यदि टंकी का व्यास 3 मीटर है तो वह कितने समय में आधी खाली हो जाएगी।

2. एक शंकु, जिसकी ऊंचाई 24 सेमी और आधार की त्रिज्या 6 सेमी है, प्रतिमा बनाने वाली चिकनी मिट्टी से बनाया गया है। एक बच्चा उसको पुनः गोले का आकार देता है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

3. एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊंचाई 4 सेमी है तथा इसके वृतीये सिरों के परिमाप (परिधियां) 18 सेमी और 6 सेमी है। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. विमाओं 5.5 सेमी × 10 सेमी × 3.5 सेमी वाला एक घनाभ बनाने के लिए 1.75 सेमी व्यास, 2 एमएम मोटाई वाले कितने चांदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा।

5. एक चांदी के घनाभ जिसकी विमाएं 8 सेमी × 9 सेमी × 11 सेमी को पिघलाकर समान त्रिज्या के सात गोले बनाए गए है। एक चांदी के गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 सेमी^{3} है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. यदि 11 सेमी × 3.5 सेमी × 2.4 सेमी मोम के एक घनाभ से 2.8 सेमी व्यास की एक मोमबती बनाई जाती है, तो मोमबती की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
8. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 27 सेमी^{3} है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अध्याय–14
सांख्यिकी

अंक (प्रश्न) 2(2) + 2(1) + 3(1) + 4(1) = 11(5)

* समान्तर माध्य

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{आंकडों का योग}}{\text{आंकडो की संख्या}}$$

a. व्यक्तिगत श्रेणी का माध्य $(\overline{X}) = \frac{\sum Xi}{N}$

$\sum Xi = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + ... + X_n$ $n =$ आंकड़ों की संख्या

b. अवर्गीकृत बंटन $\overline{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum F_i}$

c. कल्पित माध्य द्वारा $\overline{X} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum F_i}$, जहां $d_i = X_i - a$

जहां $a =$ कल्पित माध्य (चर X का मध्य मान)

d. पद विचलन विधि $\overline{X} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

जहां $a =$ कल्पित माध्य

$ui = \frac{di}{h}, di = \frac{X_i - a}{h}$, $h =$ वर्ग अंतराल

अभ्यास प्रश्न

1. प्रथम 10 सम प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

   प्रथम 10 सम प्राकृत संख्याए $= 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20$ है।

   अतः माध्य $(\overline{x}) = \frac{2+4+6+8+10+12+14+16+18+20}{10} = \frac{110}{10} = 11$

2. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात करो।
3. निम्न बारम्बारता बंटन का प्रत्यक्ष विधि से समान्तर माध्य ज्ञात करो।

x	20	30	40	50	60	70	80
f	6	11	7	4	4	2	1

हलः

xi	fi	$fi \times xi$
20	6	$20 \times 6 = 120$
30	11	$30 \times 11 = 330$
40	7	$40 \times 7 = 280$
50	4	$50 \times 4 = 200$
60	4	$60 \times 4 = 240$
70	2	$70 \times 2 = 140$
80	1	$80 \times 1 = 80$
कुल	$\sum fi$	$\sum(fi \times xi) = 1390$

समान्तर माध्य $= \dfrac{\Sigma(fi \times xi)}{\Sigma fi} = \dfrac{1390}{35} = 39.71$

* निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों का दैनिक जेब खर्च दर्शाता है। माध्य जेब खर्च रुपये 18 है। लुप्त बारम्बारता f ज्ञात कीजिए। (i) प्रत्यक्ष विधि से एवं (ii) कल्पित विधि से हल करो।

दैनिक जेब भत्ता (रु.में)	$11-13$	$13-15$	$15-17$	$17-19$	$19-21$	$21-23$	$23-25$
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हलः

दैनिक जेब भत्ता (रु. में)	बच्चों की संख्या fi	वर्ग चिहन $= \dfrac{\text{ऊपरी सीमा+निम्न सीमा}}{2}$	fixi
$11-13$	7	$12 = \dfrac{11+13}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$	$7 \times 12 - 84$
$13-15$	6	14	$6 \times 14 = 84$
$15-17$	9	16	$9 \times 16 = 144$
$17-19$	13	18	$13 \times 18 = 234$
$19-21$	f	2	$f \times 20 = 20f$
$21-23$	5	22	$5 \times 22 = 110$
$23-25$	4	24	$4 \times 24 = 96$
	$\Sigma fi = f + 44$		$\Sigma fixi = 752 + 20f$

$\bar{X} = \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}; \bar{X} = 18$ (प्रश्नानुसार) $\frac{752 + 20f}{f + 44} \Rightarrow 18 = \frac{752 + 20f}{f + 44} \Rightarrow 18f + 792 = 20f + 792 + 752 \Rightarrow f = 20$

5. पदों 5, 6, 7, 9, k और 20 का समान्तर माध्य 11 हो तो k का मान ज्ञात कीजिये।

हलः समान्तर माध्य $= \frac{\text{पदों का योग}}{\text{कुल पद}}$

$\frac{11}{1} = \frac{5 + 6 + 7 + 9 + k + 20}{6}$

$66 = 47 + k \Rightarrow k = 66 - 47 = 19$

6. यदि $X_1, X_2, X_3, ...X_n$ का माध्य $\bar{X}$ हो तो $mx_1, mx_2, ...m_n$ का माध्य ज्ञात करो।

हलः अभिष्ट माध्य $= m\bar{x}$

उदाहरण– यदि 5 संख्याओं का माध्य 15 है। प्रत्येक संख्या को 4 से गुणा करने पर नया माध्य क्या होगा।

हलः अभिष्ट माध्य $= 15 \times 4 = 60$

7. निम्न बंटन का कल्पित माध्य मानकर माध्य $\bar{x}$ ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	10 – 25	25 – 40	40 – 55	55 – 70	70 – 85	85 – 100
बारम्बारता	2	3	7	5	6	7

हलः

वर्ग अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या बारम्बारता (fi)	वर्ग चिह्न	$di = xi - a$ $a = 47.5$	fidi
10 – 25	2	$\frac{10+25}{2} = 17.5$	$17.5 - 47.5 = -30$	$-30 \times 2 = -60$
25 – 40	3	32.5	$32.5 - 47.5 = -15$	$-15 \times 3 = -45$
40 – 55	7	47.5	$47.5 - 47.5 = 0$	$7 \times 0 = 0$
55 – 70	5	62.5	$62.5 - 47.5 = 15$	$15 \times 5 = 75$
7 – 85	6	77.5	$77.5 - 47.5 = 30$	$30 \times 6 = 180$
82 – 100	7	92.5	$92.5 - 47.5 = 45$	$45 \times 7 = 315$
योग	$\Sigma fi = 30$			$\Sigma fidi = 465$

माध्य $(\bar{X}) = a + \frac{\Sigma fidi}{\Sigma fi}$, यहां a (कल्पित मान) $= 47.5$

$$= 47.5 + \frac{465}{30}$$

$$= 47.5 + 15.5$$

माध्य $(\bar{x}) = 63$

8. वायु में सल्फर डाइऑक्साइड की सांद्रता (भाग प्रति मिलियन में) ज्ञात करने के लिए, एक नगर के 30 मोहल्लों से आंकड़े एकत्रित किए जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया गया है–

सल्फर डाइऑक्साइड की सांद्रता	बारम्बारता
0.00 – 0.04	4
0.04 – 0.08	9
0.08 – 0.12	9
0.12 – 0.16	2
0.16 – 0.20	4
0.20 – 0.24	2

हलः

सल्फर डाइऑक्साइड की सांद्रता	बारम्बारता	वर्ग चिह्न	$ui = \frac{xi - a}{h}$	fiui
0.00 – 0.04	4	0.02	–2	–8
0.04 – 0.08	9	0.06	–1	–9
0.08 – 0.12	9	0.10	0	0
0.12 – 0.16	2	0.14	1	2
0.16 – 0.20	4	0.18	2	8
0.20 – 0.24	2	0.22	3	6
योग	$\Sigma fi = 30$			$\Sigma fiui = -1$

a (कल्पित माध्य) $= 0.10$

वर्ग माप $(h) = 0.04$

माध्य $(\bar{x}) = a + \frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi} \times h \Rightarrow \bar{x} = 0.10 + \left[\frac{(-1)}{30} \times 0.04\right]$

$$\overline{x} = 0.10 - \left[\frac{0.04}{30}\right] \Rightarrow \overline{x} = 0.1 - 0.0012 = 0.099\,ppm$$

अभ्याय हेतु प्रश्न

1. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए:

साक्षरता दर (%) में	45 – 55	55 – 65	65 – 75	75 – 85	85 – 95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

2. नीचे दिए गए बंटन का माध्य पद विचलन, कल्पित विधि से ज्ञात करो।

वर्ग अन्तराल	50 – 52	53 – 55	56 – 58	59 – 61	62 – 64
बारम्बारता	15	110	135	115	25

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. प्रथम पांच पूर्ण संख्याओं का माध्य है?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (2)

2. प्रथम पांच प्राकृत संख्याओं का माध्य है?

(1) 5 (2) 3 (3) 15 (4) 12 (2)

3. A, B, C, D का गणितीय माध्य होगा–

(1) A+B+C+D (2) $\frac{ABCD}{4}$ (3) ABCD (4) $\frac{A+B+C+D}{4}$ (4)

4. वर्ग अन्तराल का 15–25 का वर्ग चिह्न होगा–

(1) 15 (2) 25 (3) 15 + 25 (4) 20 (4)

5. निम्नलिखित में से कौन आलेख द्वारा निर्धारित नहीं किया जा सकता है?

(1) माध्यक (2) बहुलक (3) माध्य (4) कोई नहीं (3)

6. दिए गए सूत्र $\overline{x} = a + \left(\frac{\Sigma fiui}{\Sigma fi}\right) \times h$ में, ui का मान होगा–

(1) $h(xi - a)$ (2) $\frac{xi - a}{h}$ (3) $\frac{a - xi}{h}$ (4) $\frac{xi + a}{h}$ (2)

7. बारम्बारता बंटन के माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के बीच निम्न संबंध है–

उ. बहुलक = 3 माध्यिका – 2 माध्य

8. यदि कोई प्रेक्षण वर्ग की उच्च सीमा में आता है, तो उसे अगले अन्तराल में लेते हैं।

9. यदि $x, x+3, x+6, x+9$ तथा $x+12$ का माध्य 10 है, तो x का मान होगा।

बहुलक–

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी बारम्बारता सर्वाधिक होती है, बहुलक कहलाता है।

a. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन का बहुलक–

1. सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग होगा।

2. बहुलक सूत्र –

$$Z = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$L =$ बहुलक वर्ग की निम्न सीमा, $f_1 =$ बहुलक की बारम्बारता

$f_0 =$ बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता

$f_2 =$ बहुलक वर्ग से ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता

$h =$ बहुलक वर्ग का अंतराल

1. निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात करो–

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
$65-85$	4
$85-105$	5
$105-125$	$13 = f_0$
$L = 125-145$	$20 = f_1$
$145-165$	$14 = f_2$
$165-185$	8
$185-205$	4

हलः सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग $= 125-145$

बहुलक सूत्र $Z = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$L = 125, h = 20, f_1 = 20, f_2 = 14, f_0 = 13$

बहुलक $= 125 + \frac{20-13}{2 \times 20 - 13 - 14} \times 20$

$= 125 + \frac{7}{40-27} \times 20 \Rightarrow 125 + \frac{7 \times 20}{13}$

$= 125 + \frac{140}{13} = 125 + 10.76 = 135.76$ इकाई

2. बंटन 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3 का बहुलक लिखिए।

उ. उपर्युक्त बंटन में 2 सर्वाधिक 3 बार आया है अतः बहुलक $= 2$ होगा।

अभ्यास हेतु प्रश्न

1. निम्नलिखित आंकड़े 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवनकाल (घंटों में) की सूचना देते हैः

जीवनकाल (घंटों में)	$0-20$	$20-40$	$40-60$	$60-80$	$80-100$	$100-120$
बारम्बारता	10	35	52	61	38	29

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

2. निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात करो–

वर्ग	$1-5$	$6-10$	$11-15$	$16-20$	$21-25$
बारम्बारता	7	5	12	10	6

माध्यक–

a व्यक्तिगत श्रेणी का माध्यक–

1. चर X के n पदों को आरोही व अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने

उदा. 1. 20, 57, 17, 26, 91, 115, 26 निम्नलिखित आंकड़ों का माध्यक ज्ञात करो।

उ. आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

17, 20, 26, 26, 57, 91, 115

$n = 7$ (विषम)

माध्यक $= \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ वी संख्या (मध्य पद)

माध्यक $= 26$

2. निम्न आंकड़ों का माध्यक ज्ञात करो।

25, 34, 31, 10, 20, 15

उ. $n = 6$ (सम), आरोही क्रम में 10, 15, 20, 25, 31, 34 व्यवस्थित करने

$$\text{माध्यक} = \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\text{वां पद}\right) + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वां पद}}{2}\right] = \frac{3\text{वां पद} + 4\text{वां पद}}{2} = \frac{20+25}{2} = 22.5$$

माध्यक $= 22.5$

3. यदि निम्न आंकड़े आरोही क्रम में व्यवस्थित है तथा इसका माध्यक 7 है। X का मान ज्ञात करो।

3, 4, 5, X , 8, 8, 10

उ. $n = 7$ विषम

माध्यक $=$ मध्य पद

$7 = 4$ वां पद

$7 = X$ अतः $X = 7$

b अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन का माध्यक—

1. संचयी बारम्बारता सारणी बनाइये।

2. $\frac{N}{2} = \frac{\Sigma f}{2}$ ज्ञात करिये।

3. $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत चार का मान ही अभीष्ट माध्यक है।

4. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो—

x	2	4	6	8	10	12	14
f	2	4	8	5	3	7	2

उ.

x	f	संचयी बारम्बारता (cf)
2	2	2
4	4	$2 + 4 = 6$
6	8	$6 + 8 = 14$
8	5	$14 + 5 = 19$
10	3	$19 + 3 = 22$
12	7	$22 + 7 = 29$
14	2	$29 + 2 = 31$
	$\Sigma f = 31$	

$$\frac{N}{2} = \frac{\Sigma f}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$$

अतः 15.5 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता के संगत चर $X = 8$

अभीष्ट माध्यक $= 8$

(c) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन का माध्यक–

1. संचयी बारम्बारता सारणी बनाइये।

2. $\frac{N}{2}=\frac{\Sigma f}{2}$ ज्ञात करिये।

3. $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत वर्ग माध्यक वर्ग है।

4. माध्यक $=L+\left(\frac{\frac{N}{2}-cf}{f}\right)\times h$

$L=$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा, $f=$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता

$h=$ माध्यक वर्ग का अंतराल, $cf=$ माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारम्बारता

4. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो।

वर्ग अन्तराल	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65	65 – 70	70 – 75
बारम्बारता	2	3	8	6	6	3	2

उ.

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
40 – 45	2	2
45 – 50	3	$2+3=5$
50 – 55	8	$5+8=13$ cf
55 – 60	6 f	$13+6=19$
60 – 65	6	$19+6=25$
65 – 70	3	$25+3=28$
70 – 75	2	$28+2=30$
योग	$\Sigma f=n=30$	

$\frac{n}{2}=\frac{30}{2}=15$, जो कि अन्तराल $55-60$ में स्थित है। क्योंकि 15 से अधिक संचयी बारम्बारता 19 के संगत वर्ग माध्यक वर्ग $55-60$ है।

$L=55, n=30, f=6, cf=13$ और $h=5$

माध्यक $= \ell + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - c.f.}{F}\right) \times h$

$= 55 + \left(\dfrac{15-13}{6}\right) \times 5 = 55 + \dfrac{2}{6} \times 5 = 55 + \dfrac{10}{6}$

$= 55 + 1.66 = 55.67$ लगभग

माध्यक $= 56.67$ है।

अभ्यास हेतु प्रश्न

1 निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो–

वर्ग अन्तराल	118 – 126	127 – 135	136 – 144	145 – 153	154 – 162	163 – 171
बारम्बारता	3	5	9	12	5	4

2 यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए–

वर्ग अन्तराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	योग
बारम्बारता	5	x	20	15	y	5	60

3 37, 31, 42, 43, 46, 25, 39, 45, 32 का माध्यक .... है।

4 किसी स्कूल की कक्षा x की 51 लड़कियों की उंचाईयों का एक सर्वेक्षण किया गया और निम्न आंकड़े प्राप्त किए गए।

ऊँचाई (cm) में	लड़कियों की संख्या
140 से कम	4
145 से कम	11
150 से कम	29
155 से कम	40
160 से कम	46
165 से कम	51
माध्यक की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।	

5. निम्नलिखित बंटन सारणी को एक कम प्रकार के संचयी बारम्बारता बंटन में बदलिए और उसका तोरण खींचिए।

वर्ग	100 – 200	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200
बारम्बारता	12	14	8	6	10

6. किसी मोहल्ले के एक शॉपिंग कॉम्पलेक्स को 30 दुकानों द्वारा अर्जित किए गए कार्मिक लाभों से निम्न बारम्बारता बंटन प्राप्त होता है–

लाभ (लाख रुपये में)	दुकानों की संख्या
5 से अधिक या उसके बराबर	30
10 से अधिक या उसके बराबर	28
15 से अधिक या उसके बराबर	16
20 से अधिक या उसके बराबर	14
25 से अधिक या उसके बराबर	10
30 से अधिक या उसके बराबर	7
35 से अधिक या उसके बराबर	3

उपरोक्त आंकड़ों के लिए एक ही अक्षों पर दोनों तोरण खीचिंए। इसके बाद माध्यक लाभ ज्ञात कीजिए।

अध्याय–15

प्रायिकता

अंक(प्रश्न) 1(1) + 1(1) + 2(1) = 4(3)

* किसी घटना को घटिक होने पर संभावना का संख्यात्मक रूप ही प्रायिकता है।

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}}$$

* $P(\overline{A})$– घटना A के घटित होने की प्रायिकता
* $P(\overline{A})$– घटना A के घटित नहीं होने की प्रायिकता
* $P(\overline{A})+P(\overline{A})=1$, जहां $P(\overline{A})='A\text{ नहीं}'$ को व्यक्त करता $P(\overline{A})-P(notA)$
* $P(A)=1-P(\vec{A})$
* किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 होता है।
* किसी असंभव घटना की प्रायिकता शून्य (0) होगी।
* किसी निश्चित घटना की प्रायिकता 1 होगी।
* सभी प्रायिकताओं का मान 0 से अधिक या बराबर आर 1 से कम या बराबर होता है।

  अर्थात् $0 \le P(A) \le 1$
* ताश के पत्ते (कार्ड) से संबंधित प्रश्न–

  * ताश की गड्डी में कु पत्तों की संख्या $=52$

  * ये 52 पत्ते 4 समूह में विजाजित होते हैं–

  i. हुकुम = 13 कार्ड (काले रंग के कार्ड)

  ii. पान = 13 कार्ड (लाल रंग के पत्ते)

  iii. ईंट = कार्ड (लाल रंग के)

  iv. चिड़ी = 13 कार्ड (काले रंग के)
* प्रत्येक समूह में तेरह पते (कार्ड) होते है।
* लाल रंग के पते = 26
* काले रंग के पते = 26
* फसे कार्ड,/मुख/तस्वीर कार्ड = 12 (4+4+4) कार्ड
* बादशाह = 04
* बेगम = 04
* गुलाम = 04
* इक्का = 04 (फेस/मुख/तस्वीर/कार्ड में नहीं होता है।)

1. ताश के 52 पतों की एक भली भांति फेंटी गड्डी में से एक पता निकाला गया है। निकले गए पते की प्रायिकता ज्ञात करो। यदि–

(a) पता फेस/तस्वीर वाला हो

(b) लाल रंग का पता

(c) एक इक्का हो

(d) पान का गुलाम

(e) हुकुम का पता

(f) एक ईंट का पता

(g) लाल रंग का बादशाह

(h) पता पान का न हो

उतर–

(a) कुल परिणाम = 52

पता फेस (तस्वीर) वाला होने के अनुकूल परिणम $=12$

अतः प्रायिकता = $\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$

(b) लाल रंग के पते होने के अनुकूल परिणाम $=26$

निकाला गया पता लाल रंग के होने की प्रायिकता $=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$

(c) इक्का होने के अनुकूल परिणाम $=4$

इक्का होने की प्रायिकता $=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

(d) पान का गुलाम होने के अनुकूल परिणाम $=1$

पान का गुलाम होने की प्रायिकता $=\frac{1}{52}$

(e) हुकुम के पते $=13$

हुकुम का पता प्राप्त करने की प्रायिकता $=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

(f) ईंट के पते $=13$

ईंट की बेगम प्राप्त करने की प्रायिकता $=\frac{1}{52}$

(g) लाल रंग के बादशाह होने के अनुकूल परिणाम $=2$

लाल रंग के बादशाह होने की प्रायिकता $=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$

(g) पता पान का न होने के अनुकूल परिणाम $=52-13=39$

निकाला गया पता पान का न होने की प्रायिकता $=\frac{39}{52}=\frac{3}{4}$

* निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती है?

(1) $\frac{2}{3}$ (2) -1.5

(3) 0.7 (d) 0.7 (2)

* दिया हुआ है कि 3 विद्यार्थियों के एक समूह में से 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता 0.992 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो?

उ. $P(\overline{E})=0.992$

$\because P(\overline{E})+P(E)=1 \Rightarrow P(E)=1-P(\overline{E})$

$=1-0.992=0.008$

पासे से संबंधित प्रश्न–

* एक पासे को n बार / n पासों को एक बार उछालने पर कुल संभव परिणाम $=6^n$
* एक पासे को एक बार उछालने पर कुल संभव परिणाम $=1,2,3,4,5,6$
* कुल परिणाम $=06$

सम संख्या $=2,4,6$

विषम संख्या $=1,3,5$

अभाज्य संख्या $=2,3,5$

भाज्य संख्या $=4,6$

* एक पासे को एक बार फैंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए–

(i) एक अभाज संख्या

(ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या

(iii) एक विषम संख्या

उतर–

जब पासे को एक बार फेंका जाता है तो संभव परिणाम हैं–

1,2,3,4,5,6

(i) अभाज्य संख्यांए है–

2,3,5

अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(ii) 2 और 6 के बीच स्थित संख्याएं $=3,4,5$

3 और 6 के बीच स्थित संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(iii) विषम संख्याएं है–

1,3,5

एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

एक पासे को दो बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने होंगें?

हलः $6^2=6\times 6=36$

* पासे को दो बार उछालने पर इसकी क्या प्रायिकता होगी कि प्राप्त संख्याऐं–

(i) 5 किसी भी बार में नही आएगा

(ii) 5 कम से कम एक बार आएगा

(iii) युग्मक (द्विक) संख्याऐं हो

(iv) योग 8 है।

उत्तर– कुल परिणाम $=36$

(i) 5 किसी भी बार में न आये घटना के अनुकूल परिणाम $=$ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,1), (2,2,), (2, 3), (2,4), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4,), (6,6)

कुल $=25$

घटना के 5 एक भी बार न आने की प्रायिकता $=\frac{25}{36}$

(ii) 5 कम से कम एक बार आने के अनुकूल परिणाम (1, 5), (2,5), (3, 5), (4, 5), (5,1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5,5), (5, 6), (6, 5) कुल $=11$

5 कम से कम एक बार आएगा की प्रायिकता $=\frac{11}{36}$

(iii) युग्मक सख्याएं

(1,1), (2,2), (3,3), (4, 4), (5, 5), (6,6) कुल $=06$

युग्मक संख्याऐं प्राप्त होने की प्रायिकता $=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(iv) योग 8 प्राप्त हो इस घटना के अनुकूल परिणाम

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

कुल $=5$

प्राप्त संख्याओं का योग 8 होने की प्रायिकत $=\frac{5}{36}$

सिक्के से संबंधित प्रश्न–

* एक सिक्के को n बार / n सिक्कों को एक बार उछालने पर

उ. कुल परिणाम $=2^n$

* एक सिक्के को दो बार उछालने पर कुल परिणाम लिखो।

उ. $2^2=2\times 2=4(HH, TT, TH, HT)$

1. एक सिक्के को तीन बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने–

उ. $2^3 = 8$

2. एक सिक्के को एक बार उछालने पर चित (H) आने की प्रायिकता क्या होगी?

उ. संभावित परिणाम = चित (H) , पट (T)

कुल परिणाम $= 02$

$P(H) =$ चित आने की प्रायिकता

$= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}} = \frac{1}{2}$

3. एक सिक्के को दो बार उछालने पर दोनों पर पट (T) आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उ. कुल परिणाम $= 04$

अनुकूल परिणाम $= TT$

कुल $= 01$

अभिष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

4. दो सिक्कों को एक साथ उछालनें पर इनकी क्या प्रायिकता है कि कम से कम एक चित प्राप्त हो?

उ. कुल परिणाम $= 04\ (HH, TT, HT, TH)$

अनुकूल परिणाम $= HH, HT, TH$

अनुकूल परिणाम $= 03$

$P(E) = \frac{3}{4}$

5. एक लीप वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उ. लीप वर्ष में 366 दिन होते है।

52 पूर्ण सप्ताह अर्थात् $52 \times 7 = 364$ दिन

शेष दिन $= 02$

इन दो दिनों की संभावनाएं निम्न हो सकती है–

(रविवार, सोमवार), (सोमवर, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार), (बुधवार, गुरूवार), (गुरूवार, शुक्रवार), (शुक्रवार, शनिवार), (शनिवार, रविवार)

अतः कुल परिणाम $= 07$

इन 7 स्थितियों में रविवार आने के अनुकूल परिणाम $= 02$

अतः लीप वर्ष में 53 रविवार आने की प्रायिकता $= \frac{02}{07} = \frac{2}{7}$

* किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए है। केवल देखकर सह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उ. खराब पेनों की संख्या $= 12$

अच्छे पेनों की संख्या $= 132$

पेनों की कुल संख्या $= 12 + 132 = 144$

अच्छा पेन प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{132}{144} = \frac{11}{12}$

* एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित है–

$[A][B][C][D][E][A]$ इस पासे को एक बार फेंका जाता है इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) A प्राप्त हो?

(ii) D प्राप्त हो?

उ. कुल फलक $= 6$

(i) A प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{2}{6}$ $[\because A$ दो फलको पर$]$

(ii) D प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$ $[\because D$ एक फलक पर$]$

अभ्यास प्रश्न

1. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो E नहीं या $P(\overline{E})$ की प्रायिकता क्या है?
2. यदि किसी के जीतने की प्रायिकता 0.07 है, तो उसके हारने की प्रायिकता होगी। होने की प्रायिकता है।
3. यादृच्छिक रूप से चुन गये एक ऐसे वर्ष में, जो अधिवर्ष न हो 53 रविवार होने की प्रायिकता क्या होगी?
4. अच्छी प्रकार से फेटी गई 52 पतों की एक गड्डी में से एक इक्का नहीं होने की प्रायिकता है।
5. दो सिक्क एक साथ उछाले जाते है, अधिक से अधिक एक चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. दो भिन्न पासों को एक साथ उछाला गया। दोनों पासों के उपरी तलों पर आई संख्याओं का गुणनफल 6 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. A तथा B मित्र है, उनके जन्म दिवस की प्रायिकता ज्ञात करो।
   (i) जब जन्म दिवस समान हो
   (ii) जब जन्म दिवस भिन्न हो

8. एक पेटी में 90 डिस्क है, जिन पर 1 से 90 तक संख्याएं अंकित है। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी–

   (i) दो अंकों की एक संख्या।

   (ii) 5 से विभाज्य एक संख्या।

9. एक पिग्गी बैंक में 50 पैसे के सौ सिक्के है, 1 रु. के 50 सिक्के है, 2 रु. के बीस सिक्के और 5 रु. के दस सिक्के है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया सिक्का (i) 50 पैसे का होगा (ii) 5 रु. का नहीं होगा?

10. एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे है। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है तो इसकी प्रायिकता है कि यह कंचा–

    (i) सफेद है

    (ii) नीला है

    (iii) लाल नहीं है

    (iv) लाल है

टेलीग्राम चैनल ज्वाइन करें