बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल...

शेखावाटी मिशन-100

हिन्दी साहित्य

कक्षा-12

कार्यालय : संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)
प्रभारी : शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

: missionshekhawati100@gmail.com | 9413361111, 9828336296

टीम शेखावाटी मिशन-100

संतोष कुमार महर्षि
संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चुरु संभाग
चुरु (राज.)

रामचन्द्र पिलानियां
मुख्य जिला शिक्षा अधिकारी
सीकर (राज.)

पितराम सिंह काला
मुख्य जिला शिक्षा अधिकारी
झुन्झुनूं (राज.)

मनोज कुमार ढ़ाका
जिला शिक्षा अधिकारी
झुन्झुनूं (राज.)

निसार अहमद खान
जिला शिक्षा अधिकारी
चुरु (राज.)

महेन्द्र सिंह बड़सरा
सहायक निदेशक (स.शै.प्र.)
कार्यालय संयुक्त निदेशक, चुरु

हरदयाल सिंह फगेड़िया
अति.जिला शिक्षा अधिकारी (शै.प्र.)
सीकर (राज.)

रामचन्द्र सिंह बगड़िया
अति.जिला शिक्षा अधिकारी
सीकर (राज.)

नीरज सिहाग
अति.जिला शिक्षा अधिकारी (शै.प्र.)
झुन्झुनूं (राज.)

सांवरमल गहनोलिया
अति. जिला शिक्षा अधिकारी (शै.प्र.)
चुरु (राज.)

महेश सेवदा
सहसंयोजक शेखावाटी मिशन-100
सीकर (राज.)

रामावतार भदाला
सहसंयोजक शेखावाटी मिशन-100
सीकर (राज.)

तकीनीकी सहयोग

राजीव कुमार, निजी सहायक | पवन ढाका, कनिष्ठ सहायक | महेन्द्र सिंह कोक, सहा. प्रशा. अधिकारी | अभिषेक चाैधरी, कनिष्ठ सहायक | दीपेन्द्र, कनिष्ठ सहायक

जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक (मुख्यालय), सीकर

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

शेखावाटी मिशन-100

बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन कार्यक्रम सत्र : 2021-2022

उच्च माध्यमिक परीक्षा - 2022

विषय : गणित-10

सर्वश्रेष्ठ सफलता सुनिश्चित करने हेतु सर्वश्रेष्ठ संकलन

महावीर नेहरा
संयोजक गणित
रा.उ.मा.वि.,कासली (सीकर)

जितेन्द्र सिंह बगड़िया
रा.मा.वि., भूमा छोटा (सीकर)

प्यारेलाल ढ़ाका
रा.उ.मा.वि., भोजासर बड़ा (सीकर)

सुरेन्द्र बालान
रा.उ.मा.वि., डोटासरा

राकेश कुमार पूनियां
रा.उ.मा.वि., रोसावा (सीकर)

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

Chapter - 3 : दो चरो वाले रैखिक समीकरण युग्म

अंक भार – 9 : प्रश्नों की संख्या – 5 (1(1) + 1(1) + 1(1) + 2(1) + 4(1) = 9(5))

* रैखिक समीकरण – एक ऐसा समीकरण जिसमें उपस्थित चर की घात एक हो।
* दो चरों वाला रैखिक समीकरण – जब समीकरण में उपस्थित चरों की संख्या दो एवं दोनों की घात एक–एक हो।
* दो चरो वाले रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

  जहां $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ वास्तविक संख्या हैं।

  तथा x, y चर हैं।
* दो चरो वाले एक रैखिक समीकरण का आलेखन (ग्राफ) करने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है। अतः समीकरण युग्म में दो सरल रेखाएं एक समतल पर प्राप्त होगी। जिनकी स्थिति परस्पर निम्न प्रकार हो सकती है–

  (1) दोनों रेखाएं एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।

  (2) दोनों रेखाएं प्रतिच्छेद नहीं करें अर्थात समान्तर हो।

  (3) दोनों रेखाएं एक दूसरे को ढ़के अर्थात सम्पाती हो।
* उदाहरण –

$2x + 3y = 5$	$2x + 3y = 9$	$x + 2y = 4$
$5x - 3y = 2$	$4x + 6y = 18$	$2x + 4y = 12$

* रैखिक समीकरण युग्म का हल :– ग्राफ्रीय विधि –

  रैखिक समीकरण युग्म के ग्राफ्रीय आलेख से –

  (i) रेखाएं एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें तो अद्वितीय हल होगा।

  (ii) रेखाएं सम्पाती हों तो – अपरिमित रूप से अनन्त हल होंगे।

  (iii) रेखाएं समान्तर हों तो – कोई हल नहीं होगा।
* रैखिक समीकरण युग्म के गुणांकों की तुलना :–

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

शेखावाटी मिशन-100

क्र.सं.	रैखिक समीकरण युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफ्रीय निरुपण	बीजगणितीय निरुपण	संगत/असंगत
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	प्रतिच्छेदी रेखाएं	केवल एक हल (अद्वितीय हल)	संगत
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	सम्पाती रेखाएं	अनन्त हल	संगत
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$				$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएं	कोई हल नहीं	असंगत

प्र.1 निम्न रैखिक समीकरण युग्मों के गुणांकों की तुलना करके इनके हल होंगे या नहीं

(a) $x + y = 3$ मानक रूप में लिखने पर $x + y - 3 = 0$

$3x - 2y = 4$ $3x - 2y - 4 = 0$

यहां $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (गुणांको के अनुपातों की तुलना)

अतः दिये गये समीकरण युग्म का केवल एक हल (अद्वितीय हल) होगा।

अर्थात दोनों रेखाएं प्रतिच्छेद करेगी।

(b) $x + y = 5$ मानकरूप $x + y - 5 = 0$

$2x + 2y = 10$ $2x + 2y - 10 = 0$

यहां $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$

गुणांकों के अनुपातों की तुलना करने पर

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः दिये गये रैखिक समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अन्त हल होगें।

अर्थात दोनों रेखाएं सम्पाती (ढ़की हुई) होगी।

(c) $x + y = 2$ मानक रूप में – $x + y - 2 = 0$

शेखावाटी मिशन-100

$2x + 2y = 3$ $\qquad\qquad$ $2x + 2y - 3 = 0$

यहां $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

गुणांकों के अनुपातों की तुलना करने पर

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अतः दिये गये रैखिक समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा।

अर्थात समीकरण युग्म की रेखाएं समान्तर होंगी।

प्र.2 ग्राफ्र द्वारा निम्न समीकरण युग्म का हल ज्ञात करो।

$x + 3y = 6$

$2x - 3y = 12$

हल :– उदाहरण 4 पेज नं. 52 व 53 पर हल देखें। (पाठ्य पुस्तक से)

प्र.3 रैखिक समीकरण युग्म $3x + 2y = 12$ तथा $5x - 2y = 4$ को ग्राफ्रीय विधि द्वारा हल ज्ञात करो।

हलः– प्रत्येक समीकरण को हल करके हलों की एक सारणी बनाते हैं।

समीकरण युग्म :– $\qquad 3x + 2y = 12 \qquad ...(1)$

$\qquad 5x - 2y = 4 \qquad ...(2)$

समीकरण (1) से

$x = \frac{12 - 2y}{3}$

x	2	4	–2	0
y	3	0	9	6

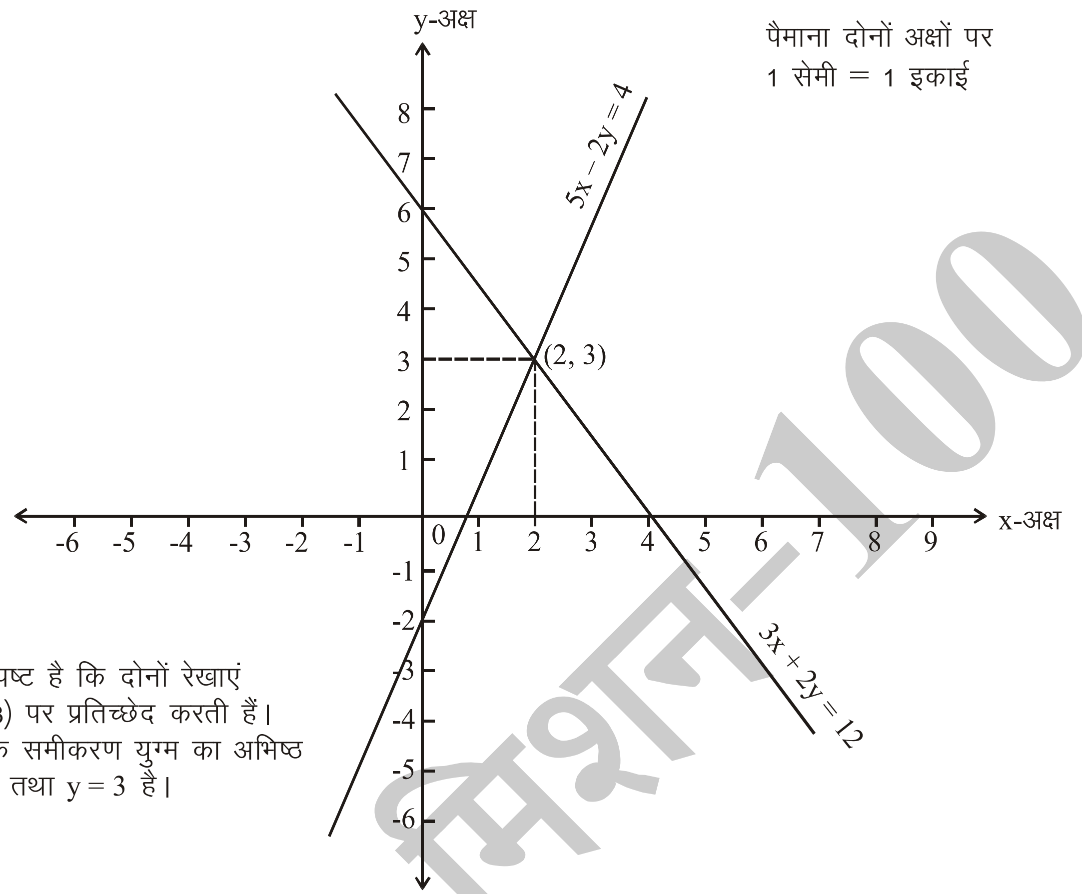
समीकरण (2) से

$x = \frac{4 + 2y}{5}$

x	0	2	4	–2
y	–2	3	8	–7

(ग्राफ्र पेपर पर)

शेखावाटी मिशन-100



ग्राफ से स्पष्ट है कि दोनों रेखाएं बिन्दु (2, 3) पर प्रतिच्छेद करती हैं। अतः रैखिक समीकरण युग्म का अभिष्ठ हल x = 2 तथा y = 3 है।

शेखावाटी मिशन-100

* रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधियां –

(1) प्रतिस्थान विधि

(2) विलोपन विधि

(3) वज्र गुणा विधि

(1) प्रतिस्थापन विधि– (उदाहरण से)

Ex.- रैखिक समीकरण युग्म $7x - 15y = 2$ ...(1) को प्रतिस्थापन विधि से हल करो –

$x + 2y = 3$ ...(2)

हलः– **चरण -I** किसी एक समीकरण को लेते है तथा किसी एक चर का मान दूसरे चर के पदों में लिखते हैं –

अतः समीकरण (2) से

चरण -II $x = 3 - 2y$ ...(3)

x का मान समीकरण (3) से समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$21 - 14y - 15y = 2$$

$$-29y = 2 - 21$$

$$-29y = -19$$

$$y = \frac{-19}{29}$$

चरण -III y का यह मान समीकरण (3) में रखने पर

$$x = 3 - 2 \times \frac{19}{29} = 3 - \frac{38}{29}$$

$$= \frac{87 - 38}{29} = \frac{49}{29}$$

अतः समीकरण युग्म का हल $x = \frac{49}{29}$ तथा $y = \frac{19}{29}$

प्र.1. निम्न रैखिक समीकरण युग्मों को प्रतिस्थापन विधि से हल करो।

(a) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(b) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

प्र.2. यदि किसी भिन्न संख्या के अंश तथा हर में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश व हर में 3 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न संख्या ज्ञात करो।

(2) विलोपन विधि – (उदाहरण से)

Ex.- दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके खर्चो का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रति महीने में 2000 रु. बचना लेता है, तो उनकी मासिक आय ज्ञात करो। (समीकरण युग्म बनाकर विलोपन विधि से हल करो।)

हलः– मासिक आय 9x, 7x तथा खर्च 4y, 3y

तब $9x - 4y = 2000$ ...(1)

$7x - 3y = 2000$ ...(2)

चरण-I समीकरणों में किसी एक चर का गुणांक समान करते है।

यहां हम दोनों समीकरणों में चर y का गुणांक समान करेगें। जिसके लिए समीकरण (1) को 3 तथा समीकरण (2) को 4 से गुणा करने पर –

शेखावाटी मिशन-100

$$27x - 12y = 6000 \qquad ...(3)$$
$$28x - 12y = 8000 \qquad ...(4)$$

चरण-II y को विलुप्त करने के लिए समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर

$$27x - 28x - 12y - (-12y) = 6000 - 8000$$
$$-x = -2000$$

चरण-III x का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$7 \times 2000 - 3y = 2000$$
$$-3y = 2000 - 14000$$
$$-3y = -12000$$

अतः समीकरण युग्म का हल x = 2000, y = 4000

मासिक आय = 9x = 9 × 2000 = 18000 रु.

प्र.1 विलोपन विधि द्वारा समीकरण युग्म $3x - 5y = 4$ और $9x = 2y + 7$ का हल ज्ञात करो।

प्र.2 पांच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात नूरी की आयु सोनू की आयु की दोगुनी हो जायेगी। नूरी एवं सोनू की आयु कितनी है। विलोपन विधि द्वारा ज्ञात करो।

(3) व्रज गुणा विधि –

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

x y 1

b_1 c_1 a_1 b_1

b_2 c_2 a_2 b_2

$$\frac{x}{b_1c_2 - c_1b_2} = \frac{y}{c_1a_2 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

प्र.1 रैखिक समीकरण युग्म $2x + 3y - 46 = 0$ को वज्र गुणा विधि से हल करो।
$3x + 5y - 74 = 0$

हलः– गुणांकों को निम्न प्रकार लिखते है –

x y 1

3 -46 2 3

5 -74 3 5

$$\frac{x}{3(-74) - 5(-46)} = \frac{y}{(-46)3 - (-74)(2)} = \frac{1}{2 \times 5 - 3 \times 3}$$

शेखावाटी मिशन-100

$\Rightarrow \quad \frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$

अर्थात $\quad \frac{x}{8} = \frac{1}{1}$ or $\frac{y}{10} = \frac{1}{1}$

$\Rightarrow \quad x = 8$ or $y = 10$

अतः हल $\quad x = 8$ व $y = 10$

प्र.2 रैखिक समीकरण युग्म $2x+3y=11$ को वज्र गुणा विधि से हल ज्ञात करो।
$2x-4y=24$

प्र.3 दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। बीजगणितीय रूप में व्यक्त कर हल ज्ञात करो।

प्र.4 दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18° अधिक है। दोनों कोण ज्ञात करो।

विविध प्रश्न

1. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $x + y - 4 = 0$; $2x + ky - 3 = 0$ का कोई हल नहीं होगा –
   (a) 0 (b) 2
   (c) 6 (d) 8 Ans (c)
2. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $3x - 2y = 0$; $kx + 5y = 0$ के अनन्त हल होंगे –
   (a) ½ (b) 3
   (c) $\frac{-5}{3}$ (d) $\frac{-15}{2}$ Ans (d)
3. रैखिक समीकरण युग्म $kx - y = 2$; $6x - 2y = 3$ का हल अद्वितीय होगा यदि –
   (a) $k = 2$ (b) $k = 3$
   (c) $k \neq 3$ (d) $k \neq 0$ Ans (c)
4. रैखिक समीकरण $y - 3 = 0$; $x - 3 = 0$ एवं अक्षो से निर्मित आकृति होगी –
   (a) त्रिभुज (b) वर्ग
   (c) आयत (d) समचमुर्भुज Ans (b)
5. k का वह मान ज्ञात करो जिसके लिए रैखिक समीकरण युग्म $kx - 5y = 2$; $6x + 2y = 7$ का कोई हल नहीं होगा।
6. रोमिला ने एक स्टेशनरी की दुकान से 9रु. में 2 पेन्सिल तथा 3 रबर खरीदी। उसकी सहेली सोनाली ने भी उसी तहर के 18रु. में 4 पेंसिल तथा 6 रबर खरीदें। इसे बीजगणितीय रुप में व्यक्त करो।
7. कक्षा X के 10 विद्यार्थियों ने एक गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लेने वाले लड़कों एवं लड़कियों की संख्या ज्ञात करो।
8. एक आयताकार बाग, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 m अधिक है, का अर्द्धपरिमाप 36 m है। बाग की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात करो।
9. रैखिक समीकरण युग्म $2x + y - 6 = 0$; $4x - 2y - 4 = 0$ के संगत/असंगत की पहचान कीजिए। यदि संगत है तो हल भी ज्ञात करो।
10. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y + 24 = 0$ को हल कीजिए और इससे m का वह मान ज्ञात करो जिसके लिए $y = mx + 3$ हो।

11. P के किन मानो के लिए निम्न समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है ?

$4x + Py = -8;\ 2x + 2y + 2 = 0$

12. k के किन मानों के लिए रैखिक समीकरण $3x + y = 1$, $(2k-1)x + (k-1)y = 2k+1$ के कोई हल नहीं होगा।

* दो चरो वाले रैखिक समीकरणों के युग्मों में बदले जा सकने वाले समीकरण

Ex.1 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13; \frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$ को हल करो।

हलः– समीकरणों के युग्म को

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=13 \quad ...(1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right)=-2 \quad ...(2)$$

अब $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$ समीकरण (1) तथा (2) में रखने पर

$$2u+3v=13 \quad ...(1)$$
$$5u-4v=-2 \quad ...(2)$$

समीकरण (3) व (4) रैखिक समीकरण युग्म बनाते है जिनसे u व v का मान ज्ञात कर $\frac{1}{x}=u$ तथा $\frac{1}{y}=v$ में रखकर x तथा y के मान ज्ञात कर सकते हैं।

Ex.2 रैखिक समीकरण युग्म में बदल कर हल ज्ञात करो –

$$\frac{5}{x-1}+\frac{1}{y+2}=2; \frac{6}{x-1}-\frac{3}{y-2}=1$$

हलः– दिये गये समीकरणों में $\frac{1}{x-1}=p$ तथा $\frac{1}{y-2}=q$ प्रतिस्थापित करने पर

$5p + q = 2 \quad ...(1)$

$6p - 3q = 1 \quad ...(2)$

समीकरण (1) तथा (2) रैखिक समीकरण युग्म के रूप में हैं।

अतः वज्र गुणा विधि से हल –

p	=	q	=	1
1 ✕ -2		-2 ✕ 5		5 ✕ 1
-3 ✕ -1		-1 ✕ 6		6 ✕ -3

$$\frac{p}{-1-6}=\frac{q}{-12+5}=\frac{1}{-15-6}$$

शेखावाटी मिशन-100

अतः $p = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$

p व q के मान रखने पर $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$

$x - 1 = 3$ $\quad y - 2 = 3$

$\boxed{x = 4}$ $\quad \boxed{x = 5}$

अतः x = 4 तथा y = 5 दिये गये समीकरणों का अभिष्ठ हल है।

प्र.1 निम्न समीकरण युग्मों को रैखिक समीकरणों में बदल कर हल ज्ञात करो।

(a) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$; $\frac{8x+7y}{xy} = 15$

(b) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

शेखावाटी मिशन-100

Chapter - 1 : वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

अंक भार– 4 : प्रश्नों की संख्या – 3 (1(1) + 2(1) + 1(1) = 4(3))

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका (Euclid's Division Lemma) -

दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएं q और r विद्यमान हैं कि $a = bq + r, 0 \leq r < b$ हैं।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म इसी प्रमेयिका पर आधारित है। यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म दो धनात्मक पूर्णांको का HCF ज्ञात करने की एक विधि है।

उदा. 867 और 255 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

हलः– यहां $867 > 255$

867 और 255 पर यूक्लिड प्रमेयिका के प्रयोग से –

$$867 = 255 \times 3 + 102$$

$$255 = 102 \times 2 + 51$$

$$102 = 51 \times 2 + 0$$

यहां शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इस स्थिति में अन्तिम भाजक 51 है।

$$\therefore \text{HCF}(867, 255) = 51$$

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (The fundamental theorem of arithmetic) -

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड अभाज्य गुणनखण्डों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होते है।

* दो धनात्मक पूर्णांकों के HCF और LCM अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (अभाज्य गुणनखंड विधि) द्वारा ज्ञात कर सकते है।
* किन्ही दो धनात्मक पूर्णांको a और b के लिए

$\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$

अर्थात् दो संख्याओं का गुणनफल उनके LCM एवं HCF के गुणनफल के बराबर होता है।

उदा. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 510 और 92 का HCF और LCM ज्ञात करो।

हलः–

$$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$$

$$92 = 2^2 \times 23$$

$\text{HCF}(510, 92) = 2$

$\text{LCM}(510, 92) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$

उदा. HCF (96, 404) = 4 है तो LCM (96, 404) ज्ञात करे।

हलः–

HCF × LCM = दो संख्याओं का गुणनफल

$$4 \times \text{LCM} = 96 \times 404$$

$$\text{LCM} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

शेखावाटी मिशन-100

परिमेय संख्याओं और उनके दशमलव प्रसार –

एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत दशमलव प्रसार (trminating decimal expansions) होता है या असांत आवर्ति (non-terminating repeating) होता है।

प्रमेय मान लिजिए $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या ऐसी है कि q, 2^n5^m के रुप का है, जहां n और m ऋणेतर पूर्णांक हैं। तब x का दशमलव प्रसार सांत होता है।

उदा. $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$

अतः $\frac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार सांत हैं।

प्रमेय मान लिजिए $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या इस प्रकार की है कि q का अभाज्य गुणनखण्ड 2^n5^m के रुप का नहीं है जहां n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं। तब x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होता है।

उदा. $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है क्योंकि इसका हर 2^n5^m के रुप का नहीं है।

प्र.1 दो पूर्णांकों के गुणनफल के बराबर होता है –

(a) HCF (b) LCM

(c) $\frac{HCF}{LCM}$ (d) HCF × LCM Ans ()

प्र.2 $\frac{7}{2^4 \times 5}$ का दशमलव प्रसार है –

(a) सांत (b) असांत आवर्ती

(c) असांत अनावर्ती (d) असांत आवर्ती Ans ()

प्र.3 एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर होती है –

(a) परिमेय संख्या (b) अपरिमेय संख्या

(c) पूर्णांक संख्या (d) प्राकृत संख्या Ans ()

प्र.4 निम्न में से अपरिमेय संख्या है –

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $7\sqrt{5}$

(c) $6 + \sqrt{2}$ (d) उपरोक्त सभी Ans ()

प्र.5 HCF (6, 12, 120) है –

(a) 2 (b) 3

(c) 6 (d) 1 Ans ()

शेखावाटी मिशन-100

महत्वपूर्ण प्रश्न

प्र.1 4052 और 12575 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

प्र.2 455 और 42 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से ज्ञात कीजिए।

प्र.3 32760 को अभाज्य गुणनखंडो के गुणनफल के रुप में व्यक्त कीजिए।

प्र.4 HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

प्र.5 सिद्ध करो $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्र.6 दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रुप का होता है।

प्र.7 $\frac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार लिखिए और बताइए कि इसका दशमलव प्रसार सांत या असांत आवर्ती है।

प्र.8 $\frac{14588}{625}$ का दशमलव प्रसार लिखिए।

शेखावाटी मिशन-100

Chapter - 5

अंक भार– 9 : प्रश्नों की संख्या – 5 (1(1) + 1(1) + 2(1) + 2(1) + 3(1))

- * एक समान्तर श्रेढ़ी संख्याओं की ऐसी सूचि होती है, जिसमं प्रत्येक पद अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त होता है।
- * यह निश्चित संख्या समान्तर श्रेढ़ी का सार्व अन्तर (d) कहलाती है।
- * एक समान्तर श्रेढी का व्यापक रुप a, a + d, a + 2d, a + 3d ... है।
- * प्रथम पद a और सार्वअन्तर d वाली AP का nवां पद निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है।

$$a_n = a + (n - 1)d$$

- * किसी AP के प्रथम n पदों का योग

$$S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

- * यदि एक परिमित AP का अंतिम पद l है, तो इस AP के सभी पदों का योग

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

- * प्रथम n घन पूर्णांको का योग

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- * किसी AP का nवां पद उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम (n – 1) पदों के अंतर के बराबर है

अर्थात् $a_n = S_n - S_{n-1}$

उदाहरणार्थ $a_2 = S_2 - S_1$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. निम्नलिखित में कौनसी AP है –

   (a) 2, 4, 8, 16, ... (b) 3, 5, 8, 12, ...

   (c) 1, 3, 9, 27, ... (d) a, 2a, 3a, 4a, ... Ans (d)

2. AP 5, 11, 17, 23, ... का प्रथम पद और सार्वअन्तर क्या है ?

   (a) (6, 5) (b) (5, 11)

   (c) (5, 6) (d) (11, 6) Ans (c)

3. AP 72, 70, 68, 66 का कौनसा पद 40 होगा –

   (a) 16वां (b) 15वां

   (c) 20वां (d) 17वां Ans (d)

4. यदि किसी AP में $a_n = 9 - 5_n$ है तो AP का प्रथम पद होगा –

   (a) 9 (b) 4

   (c) 5 (d) 14 Ans (b)

5. प्रथम 50 घन पूर्णांको का योग होगा –

(a) 1250 (b) 1225

(c) 1275 (d) 1235 Ans (c)

6. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिक में लिखिए–

(i) AP 2, ..., 26 में रिक्त स्थान ज्ञात कीजिए। Ans (14)

(ii) यदि a = 7, d = 3, n = 8 है a_n = ... होगा। Ans (28)

(iii) यदि a = 4, l = 28, n = 9 है तो S = ... होगा। Ans (144)

(iv) यदि $S_2 = 45$ व $S_3 = 63$ है तो a_3 = ... होगा। Ans (18)

(v) किसी AP में $a_n = 3 + 4_n$ है तो a_5 = ... होगा। Ans (23)

लघुतरात्मक प्रश्न

1. AP 3, 8, 13, 18, ... का कौनसा पद 78 है।

हल a = 3, d = 8 - 3 = 5, a_n = 78

$a_n = a + (n - 1)\,d$

$78 = 3 + (n - 1) \times 5$

$\Rightarrow 78 - 3 = (n - 1) \times 5$

$\Rightarrow 75 = (n - 1) \times 5$

$\Rightarrow \frac{75}{5} = n - 1$

$\Rightarrow 15 = n - 1$

$\Rightarrow 15 + 1 = n$

$\Rightarrow 16 = n$

2. AP 3, 8, 13, ... 253 में अंतिम पद से 20वां पद ज्ञात कीजिए।

हल a = 253, s = 3 – 8 = –5, n = 20

$a_n = a + (n - 1)\,d$

$a_{20} = 253 + (20 - 1) \times (-5)$

$\Rightarrow a_{20} = 253 + 19 \times (-5)$

$\Rightarrow a_{20} = 253 - 95$

$\Rightarrow a_{20} = 258$

3. तीन अंकों वाली कितनी संख्यायें 7 से विभाज्य है?

हल 102, 105, ..., 999

a = 102, d = 3, a_n = 999

$a_n = a + (n - 1)\,d$

$999 - 102 + (n - 1) \times 3$

$\Rightarrow 999 - 102 = (n - 1) \times 3$

$\Rightarrow \frac{897}{3} = n - 1$

$\Rightarrow 299 = n - 1$

$\Rightarrow 299 + 1 = n$

शेखावाटी मिशन-100

$\Rightarrow$ $\boxed{300 = n}$

4. उस AP का 31वां पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वां पद 38 और 16वां पद 73 है।

हल $a_{11} = 38$ $\quad$ $a_{16} = 73$

$a + 10d = 38$ ...(1) $\quad$ $a + 15d = 73$ ...(2)

समीकरण (2) – समीकरण (1)

$a + 15d - a - 10d = 73 - 38$

$\Rightarrow 5d = 35$

$\Rightarrow d = \frac{35}{5} = 7$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$a + 10 \times 7 = 38$

$a + 70 = 38$

$a = 38 - 70 = -32$

31वां पद

$a_{31} = a + 30d$

$= (-32) + 30 \times 7$

$= -32 + 210 - 178$

5. 34 + 32 + 30 + ... + 10 का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल $a = 34, d = -2, a_n = 10, n = ?$

$n = \frac{a_n - a}{d} + 1$ $\quad$ $S = \frac{33}{2}(a + l)$

$n = \frac{10 - 34}{-2} + 1$ $\quad$ $S = \frac{13}{2}(34 + 10)$

$n = \frac{-24}{-2} + 1$ $\quad$ $S = \frac{13}{2} \times 44$

$n = 12 + 1 = 13$ $\quad$ $S = 286$

6. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल AP 1, 3, 5, 7, ..., 49

$a = 1, d = 2, a_n = 49, n = ?$

$n = \frac{a_n - a}{d} + 1$ $\quad$ $S = \frac{n}{2}(a + l)$

$n = \frac{49 - 1}{2} + 1$ $\quad$ $S = \frac{25}{2}(1 + 49)$

$\Rightarrow$ $n = \frac{48}{2} + 1$ $\quad$ $S = \frac{25}{2} \times 50$

$\Rightarrow$ $n = 25$ $\quad$ $S = 625$

शेखावाटी मिशन-100

7. किसी AP का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 औय योग 400 है। पदों की संख्या और सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

हल $a = 5, l = 45, S = 400, n = ?$

$S = \frac{n}{2}(a+l)$ $\quad\quad$ $l = a + (n-1)d$

$400 = \frac{n}{2}(5+45)$ $\quad \Rightarrow \quad$ $45 = 5 + (16 - 1) \times d$

$\Rightarrow \quad \frac{400 \times 2}{50} = n$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\frac{40}{15} = \frac{8}{3} = d$

$\Rightarrow \quad 16 = n$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\frac{8}{3} = d$

8. किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिये 7 नकद पुरस्कार देने के लिये 700 रु. की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से 20 रु. कम है तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना प्रथम पुरस्कार a है। तो

$a, a - 20, a - 210, a - 60, a - 80, a - 100, a - 120$

$a + a - 20 + a - 40 + a - 60 + a - 80 + a - 100 + a - 120 = 700$

$\Rightarrow \quad 7a - 420 = 700$

$\Rightarrow \quad 7a = 700 + 420$

$\Rightarrow \quad a = \frac{1120}{7} = 160$

अतः प्रथम पुरस्कार 160, द्वितीय 140, तृतीय 120, चतुर्थ 100, पंचम 80, षष्ठ 60

दीर्घलघुतरात्मक प्रश्न

प्र.1 इस AP के प्रथम 51 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 पद है।

प्र.2 8 के प्रथम 15 गुणनों का योग ज्ञात कीजिए।

प्र.3 संख्याओं की उस सूचि के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवां पद $a = 3 + 2n$ है।

प्र.4 n के किस मान के लिए दोनों समांतर श्रेढ़ियों 63, 65, 67, ... और 3, 10, 7, ... के n वें पद बराबर होंगें।

प्र.5 किसी AP के चौथे और 8वें पदों का योग 24 तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है। इस AP के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

प्र.6 फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 गुलाब के पौधे है। दूसरी पंक्ति में 21 गुलाब के पौधे है, तीसरी पंक्ति में 19 गुलाब के पौधे है, इत्यादि। उसकी अंतिम पंक्ति में 5 गुलाब के पौधे है इस क्यारी में कुल कितनी पंकितयां है?

शेखावाटी मिशन- 100

Chapter - प्रायिकता

अंक भार– 4 : प्रश्नों की संख्या – 3 (1(1) + 1(1) + 2(1))

* किसी घटना को घटित होने पर संभावना का संख्यात्मक रूप ही प्रायिकता है।

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}}$$

* $P(A)$ - घटना A के घटित होने की प्रायिकता
* $P(\overline{A})$ - घटना A के घटित नहीं होने की प्रायिकता
* $P(A) = 1 - P(not\ A)$ या $1 - P(\overline{A})$

निम्न प्रश्नों के उत्तर सही विकल्प चयन कर उत्तर दीजिए –

1. यदि कोई घटना E है, तब $P(E) + P(\overline{E})$ का मान होगा –

(a) 1 (b) 2

(c) –1 (d) 0 Ans ()

2. किसी घटना की प्रायिकता होती है –

(a) 1 (b) 0.1

(c) –3 (d) 15% Ans ()

3. एक असंभव घटना की प्रायिकता नहीं होती है –

(a) 0 (b) 0 व 1 के मध्य

(c) 1 (d) कोई नहीं Ans ()

4. एक निश्चित घटना की प्रायिकता होती है –

(a) 1 (b) 0

(c) 0 से 1 के मध्य (d) 1 से बड़ी Ans ()

5. एक ताश की गड्डी में तस्वीर वाले पत्तों की कुल संख्या होती है –

(a) 10 (b) 13

(c) 12 (d) 11 Ans ()

6. एक सिक्के को उछालने पर चित आने की प्रायिकता होती है –

(a) 0 (b) ½

(c) 1 (d) 2 Ans ()

7. एक पासे को फेंकने पर आने वाले कुल संभावित परिणाम होंगे –

(a) 5 (b) 6

(c) 8 (d) 7 Ans ()

8. एक पासे को फेंकने पर अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता होगी –

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$

शेखावाटी मिशन-100

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{4}$ Ans ()

9. यदि P(A), घटना A के होने की प्रायिकता को दर्शाता हो, तो –

(a) $P(A) > 1$ (b) $P(A) < 0$

(c) $0 \leq P(A) \leq 1$ (d) $-1 \leq P(A) \leq 1$ Ans ()

10. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है, तो एक इक्का प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है –

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{13}$

(c) $\frac{1}{26}$ (d) $\frac{2}{13}$ Ans ()

पासे से संबंधित प्रश्न –

* एक पासे को n बार / n पासों को एक बार फेंकने पर कुल संभव परिणाम = 6^n
* एक पासे को एक बार उछालने पर कुल संभव परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6

कुल परिणाम = 06

सम संख्या = 2, 4, 6

विषम संख्या = 1, 3, 5

अभाज्य संख्या = 2, 3, 5

1. एक पासे को एक बार उछालने पर सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल कुल परिणाम = 06

सम संख्या = 2, 4, 6

सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. एक पासे को दो बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने होगें?

हल $6^2 = 36$

3. एक पासे को दो बार उछालने पर इसकी क्या प्रायिकता होगी कि प्राप्त संख्याएं युग्मक (दूक्कि) संख्याएं हो –

हल युग्मक संख्याएं (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

कुल = 06

युग्मक संख्याएं प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{06}{36} = \frac{1}{6}$

सिक्के से संबंधित प्रश्न –

* एक सिक्के को n बार / n सिक्को को एक बार उछलने पर कुल परिणाम = 2^n

4. एक सिक्के को दो बार उछालने पर कुल परिणाम लिखो–

हल $2^2 = 4$ (HH, HT, TH, T^2T)

शेखावाटी मिशन-100

5. एक सिक्के को दो बार उछालने पर दोनों बार पर (T) आने की प्रायिकता करे।

हल कुल परिणाम = 04

दोनों बार पर (T) आने की अनुकूल परिणाम = TT

$$\text{प्रायिकता} = \frac{1}{4}$$

6. एक सिक्के को तीन बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने होंगे?

हल $2^3 = 8$

ताश के पत्तों (कार्ड) से संबंधित प्रश्न –

* ताश की गड्डी में कुल पत्ते (कार्ड) = 52
* लाल रंग के पत्ते = 26
* काले रंग के पत्ते = 26
* मुख (फेस)/तस्वीर कार्ड = 12 (4+4+4)
* बादशाह = 04 बेगम = 04 गुलाम = 04
* हुकुम के पत्ते = 13 (काले), ईंट के पत्ते = 13 (लाल)
  पान के पत्ते = 13 (लाल), चीड़ी के पत्ते = 13 (काले)

7. ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकालने पर काले रंग का पत्ता प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल कुल परिणाम = 52

काले रंग का पत्ता आने के अनुकूल परिणाम = 26

$$\text{काले रंग का पत्ता आने की प्रायिकता} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

8. ताश के 52 पत्तो की एक भली भांति गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है। निकले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात करो यदि–

(a) पत्ता फेस वाला हो (b) पत्ता ईंट का हो

(c) पत्ता लाल रंग का बादशाह हो (d) इक्का न हो

(e) काले रंग की तस्वीर वाला पत्ता हो

हल (a) कुल परिणाम = 52

पत्ता फेस वाले के परिणाम = 12

$$\therefore \text{प्रायिकता} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

(b) पत्ता ईंट के परिणाम = 13

$$\therefore \text{ईंट के पत्ते होने की प्रायिकता} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

(c) पत्ते लाल रंग का बादशाह होने के अनुकूल परिणाम = 02

$$\text{निकाला गया पत्ता लाल रंग के बादशाह होने की प्रायिकता} = \frac{02}{52} = \frac{1}{26}$$

शेखावाटी मिशन-100

(d) इक्का न होने के अनुकूल परिणाम = 52 – 2 = 48

निकाला गया पत्ता इक्का न होने की प्रायिकता = $\frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

(e) काले रंग के तस्वीर वाला पत्ता होने के अनुकूल परिणाम = 06

निकाला गया पत्ता काले रंग का तस्वीर वाले होने की प्रायिकता = $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

9. एक लीप वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल लीप वर्ष में कुल दिन = 366

52 पूर्ण सप्ताह अर्थात $52 \times 7 = 364$ दिन

शेष दिन = 02 [(रवि, सोम), (सोम, मंगल), (मंगल, बुध), (बुध, गुरु), (गुरु, शुक्र), (शुक्र, शनि), (शनि, रवि)]

अतः कुल परिणाम = 07

इन 7 स्थितियों में रविवार आने के अनुकूल परिणाम = 02

अतः 53 रविवार आने की प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{2}{7}$

10. एक डिब्बे में 20 खराब पेन व 130 अच्छे पेन है, यदि एक पेन यादृच्छाया निकाला गया है तो पेन के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल डिब्बे में कुल पेन (कुल परिणाम) = 20 + 130

= 150 (पेन)

$\therefore$ खराब पेन होने की प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{20}{150} = \frac{2}{15}$

11. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 हरे कंचे और 3 सफेद कंचे है। इस डिब्बे में से एक कच्चा निकालने की प्रायिकता होगी यदि वह कच्चा –

(i) लाल है?

(ii) हरा नहीं है?

(iii) सफेद है ?

उत्तर (i) डिब्बे में कुल कंचों की संख्या (कुल परिणाम) = 5 + 8 + 3 = 16

लाल कंचों की संख्या = 5

लाल कंचे नहीं आने की प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{5}{16}$

(ii) हरा कंचे नहीं होने के परिणाम = 16 – 8 = 08

$\therefore$ हरा कंचे नहीं होने की प्रायिकता = $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

(iii) सफेद कंचों की संख्या = 3

$\therefore$ सफेद कंचे आने की प्रायिकता = $\frac{3}{16}$

शेखावाटी मिशन-100

अभ्यासार्थ प्रश्न –

1. यदि $P(E) = 0.05$ तो 'E नहीं' कि प्रायिकता क्या है?
2. A तथा B मित्र है, उनके जन्म दिवस की प्रायिकता ज्ञात करो।
   (i) जब जन्म दिवस समान हो
   (ii) जब जन्म दिवस भिन्न हो
3. एक अलीप वर्ष में केवल 52 सोमवार आने की प्रायिकता ज्ञात करे।
4. एक पासे को एक बार उछालने पर विषम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करे।
5. एक सिक्के को 3 बार उछालने पर सभी पर तीनों बार H आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
6. दो खिलाड़ी राम और श्याम शतरंज का मैच खेलते है यह ज्ञात कीजिए कि राम द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। श्याम के जीतने की प्रायिकता क्या है?
7. एक पासे को दो बार उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि संख्याओं का योग (i) 9 हैं, (ii) 7 हैं।

शेखावाटी मिशन-100

Chapter - 11 रचनाएँ

अंक भार– 11 : प्रश्नों की संख्या – 5 (1(1) + 1(1) + 1(1) + 2(0) + 2(1) + 4(1))

* इस अध्याय में हम तीन प्रकार की रचनाओं के बारे में जानेगें।
  (i) रेखाखण्ड का विभाजन
  (ii) किसी दिए गए त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना करना।
  (iii) किसी वृत पर स्पर्श रेखाओं की रचना।
* एक वृत के बाह्य बिन्दु से वृत पर दो स्पर्श रेखायें खींची जा सकती है, जो बराबर होती है।
* वृत तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को स्पर्श बिन्दु कहते है।
* किसी वृत की त्रिज्या एवं स्पर्श रेखा के मध्य 90^o का कोण बनता है।
* ऐसी सरल रेखा जो वृत की परिधि को केवल एक ही बिन्दु पर स्पर्श करती है, स्पर्श रेखा कहलाती है।

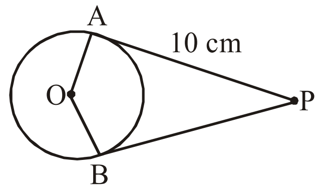
वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. एक वृत पर स्थित एक बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखायें खींची जा सकती है –
   (a) 0 (b) 1
   (c) 2 (d) अनन्त Ans (b)
2. एक वृत के अन्दर स्थित एक बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखायें खींची जा सकती है –
   (a) 0 (b) 1
   (c) 2 (d) अनन्त Ans (a)
3. ऐसी सरल रेखा जो वृत की परिधि को केवल एक ही बिन्दु पर स्पर्श करती है, कहलाती है –
   (a) छेदन रेखा (b) स्पर्श रेखा
   (c) समान्तर रेखा (d) असमान्तर रेखा Ans (b)
5. वृत को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को कहते है?
   (a) जीवा (b) स्पर्श रेखा
   (c) समान्तर रेखा (d) छेदन रेखा Ans (d)
6. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिका में लिखिए –
   (i) किसी बाह्य बिन्दु से वृत पर खींची गयी दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाई .... होती है। (बराबर)
   (ii) दो त्रिभुज समरूप होते है यदि उनके संगत कोण .... और उनकी संगत भुजाएँ .... हो। (बराबर, समान्तर)
   (iii) अर्द्धवृत में बना कोण .... होता है। (समकोण)
   (iv) .... का अर्थ रचना करने वाले त्रिभुज की भुजाओं तथा दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं के अनुपात से है। (स्केल गुणक)

शेखावाटी मिशन-100

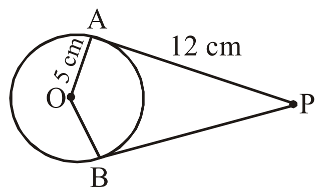
अति लघुतरात्मक प्रश्न –

1. दिये गये चित्र में यदि AP = 10 cm है तो PB का मान ज्ञात कीजिए।



उत्तर AP + PB = 10 cm

2. दिये गये चित्र में यदि OA = 5 cm व AP = 12 cm तो OP ज्ञात कीजिए।



उत्तर कर्ण^2 + आधार^2 + लम्ब^2

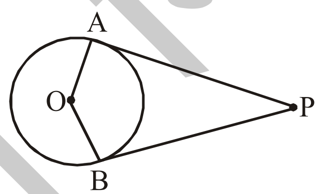
कर्ण^2 = $5^2 + 12^2$

$\Rightarrow$ कर्ण = 25 + 144

$\Rightarrow$ कर्ण = 169

$\Rightarrow$ कर्ण = $\sqrt{169}$ = 13 cm

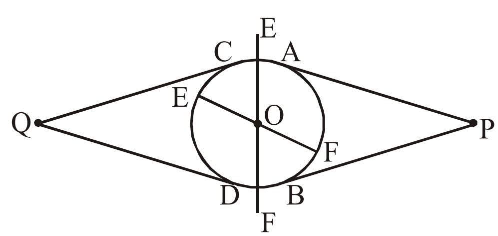
3. आकृति में $\angle AOB = 100^o$ है तो $\angle APB$ ज्ञात कीजिए।



उत्तर $\angle APB = 180^o - \angle AOB$

$\Rightarrow \angle APB = 180^o - 100^o = 80^o$

4. आकृति से स्पर्श रेखायें कौन कौनसी है नाम बताइये।



उत्तर स्पर्श रेखायें

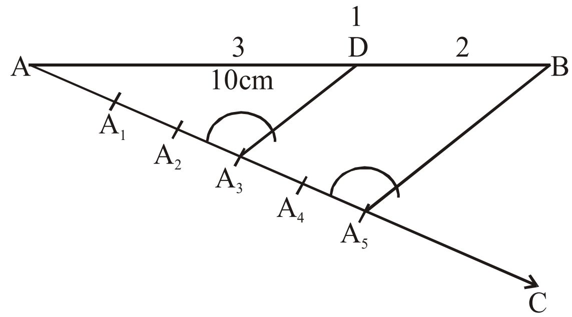
AP, BP, QC, QD

शेखावाटी मिशन-100

लघुतरात्मक प्रश्न –

1. 10 सेमी लम्बा एक रेखाखण्ड खीचिए और इसे 3 : 2 अनुपात में विभाजित कीजिए।

उत्तर रचना –



1. सर्वप्रथम रेखाखण्ड AB = 10 cm खींचा।

2. AB के साथ न्यून कोण बनाती हुयी किरण AC खींची।

3. किरण AC पर A से प्रारम्भ करे 5 बराबर दूरी (परकार की सहायता से) पर बिन्दु A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 अंकित किए।

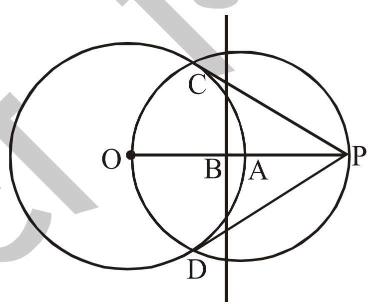
4. A_5 को बिन्दु B से मिलाया।

5. A_3 से $A_3D \| A_5B$ खींची जो AB को बिन्दु D पर मिलती है।

6. इस प्रकार बिन्दु D, AB को 3 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

2. 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत खींचिए। केन्द्र से 10 cm दूर स्थित एक बिन्दु से वृत पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लम्बाईयां मापिए।

उत्तर रचना –



1. सर्वप्रथम OA = 6 cm त्रिज्या का एक वृत खींचा।

2. केन्द्र O से 10 cm दूरी पर बिन्दु P किया।

3. OP का समद्विभाजन किया।

4. समद्विभाजक OP रेखाखण्ड को बिन्दु B पर प्रतिच्छेद करता है।

5. बिन्दु B को केन्द्र मानकर OB त्रिज्या का एक अन्य वृत खींचा जो OA त्रिज्या वाले वृत को बिन्दु C व बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करता है।

6. C व D को बिन्दु P से मिलाया।

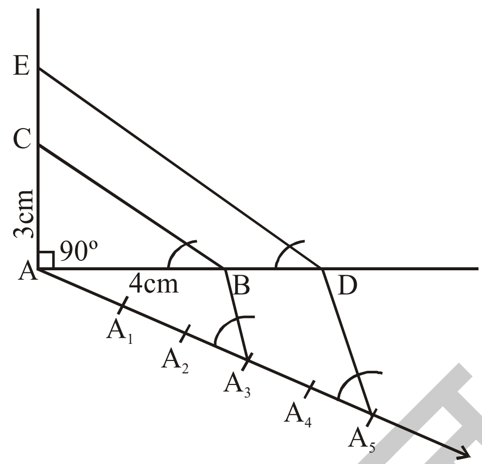
7. इस प्रकार अभीष्ट स्पर्श रेखा युग्म PC व PD प्राप्त हुआ।

PC = PD = 8 cm

निबंधात्मक प्रश्न –

1. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं (कर्ण के अतिरिक्त) 4 cm तथा 3 cm लम्बाई की हो। फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी हो।

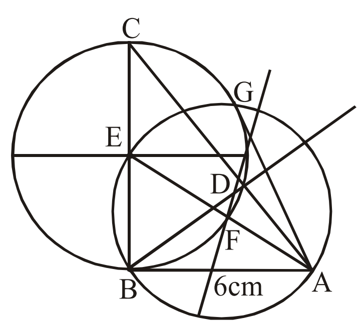
उत्तर रचना –



1. सर्वप्रथम दिए गए मानों से त्रिभुज ABC की रचना की, जिसमें AB = 4 cm, $\angle A = 90^o$ तथा AC = 3 cm
2. अब AB के नीचे न्यून कोण बनाती हुयी AX किरण खींची।
3. AX को परकार की सहायता से पांच A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 में इस प्रकार बांटा कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ ।
4. A_3 को B से मिलाया।
5. A_5 से, $A_5D \| A_3B$ खींची जो बढ़ाए गए AB रेखाखण्ड को बिन्दु D पर मिलती है।
6. D से $ED \| BC$ खींची, जो AC रेखाखण्ड को बिन्दु E पर मिलती है।
7. इस प्रकार अभीष्ट समरूप त्रिभुज ADE प्राप्त हुआ जो त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी है।

2. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = 6 cm, BC = 8 cm तथा $\angle B = 90^o$ है। B से AC पर BD लम्ब है। बिन्दुओं B, C, D से होकर जाने वाला एक वृत खींचा गया है। A से इस वृत पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

उत्तर रचना –



1. सर्वप्रथम त्रिभुज ABC की रचना की गई जिसमें AB = 6 cm, BC = 8 cm तथा $\angle B = 90^o$ ।

2. $BD \perp AC$ खींचा।

3. अब रेखाखण्ड BC का समद्विभाजन किया जिससे समद्विभाजक बिन्दु E प्राप्त हुआ।

4. E को केन्द्र मानकर ED, EB, EC त्रिज्या से एक वृत खींचा।

5. बिन्दु A को E से मिलाया तथा AE का समद्विभाजन किया, जो AE को समद्विभाजक बिन्दु F पर प्रतिच्छेद करता है।

6. F को केन्द्र मानकर AF त्रिज का एक अन्य वृत खींचा जो EC त्रिज्या वाले वृत को बिन्दु B तथा G पर प्रतिच्छेद करता है।

7. A को G से मिलाया। इस प्रकार अभीष्ट स्पर्श रेखा युग्म AB व AG प्राप्त हुआ।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. 4 cm, 5 cm और 7 cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हो।

2. 3 cm त्रिज्या का एक वृत खींचिए। इसके किसी बढ़ाए गए व्यास पर केन्द्र से 7 cm की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए। इन दोनों बिन्दुओं से वृत पर स्पर्श रेखायें खींचिए।

शेखावाटी मिशन-100

Chapter - 4 द्विघात समीकरण

अंक भार– 5 : प्रश्नों की संख्या – 4 (1(1) + 2(1) + 1(1) + 1(1))

* द्विघात समीकरण :– एक चर x में $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार की होती है।

जहां a, b, c वास्तविक संख्याएं है तथा $a \neq 0$

उदाहरण –

$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x^2 - 4 = 0$
$2x^2 - x - 3 = 0$	$x(x + 1) = 0$
$x^2 - 6x - 8 = 0$	$(x + 4)(x - 3) = 0$

1. जांच कीजिए कि निम्न में से द्विघात समीकरण नहीं है –

(a) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$ (b) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(c) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$ (d) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$ Ans (b)

2. दिया गया समीकरण $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$ द्विघात समीकरण है या नहीं।

हल समीकरण $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x + 12 = 0$

जिसमें x की अधिकतम घात 1 है। अतः द्विघात समीकरण नहीं है।

3. निम्न स्थितियों को द्विघात समीकरणों के रूप में व्यक्त करो –

(a) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है।

हल माना एक धनात्मक पूर्णांक = x

तो क्रमागत दूसरा धनात्मक पूर्णांक = x + 1

प्रश्नानुसार $x.(x + 1) = 306$

$x^2 + x = 306$

$x^2 + x - 306 = 0$

(b) एक आयताकार भूखण्ड का क्षेत्रफल 528 m^2 है। भूखण्ड की लम्बाई, चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है।

हल माना भूखण्ड की चौड़ाई = x m

तो लम्बाई = (2x +1) m

प्रश्नानुसार $x(2x + 1) = 528$

$2x^2 + x - 528 = 0$

* **द्विघात समीकरण का हल – गुणनखण्ड विधि**

- गुणनखण्ड विधि द्वारा द्विघात समीकरण के हल निम्न प्रकार ज्ञात करते है –

(i) सर्वप्रथम RHS में 0 लेकर सभी पदों को LHS में लिखिए।

(ii) LHS के पदों को $(ax + b)(cx + d)$ के रैखिक गुणनखण्डों के रूप में लिखिए।

(iii) प्रत्येक गुणनखण्ड को 0 के बराबर करके वांछित हल प्राप्त करते हैं।

शेखावाटी मिशन-100

1. द्विघात समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात करो।

हल दिया गया समीकरण

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

$$6x^2 + 3x - 4x - 2 = 0$$

$$3x(2x + 1) - 2(2x + 1) = 0$$

$$(3x - 2)(2x + 1) = 0$$

$$3x - 2 = 0 \text{ या } 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ या } \quad x = -\frac{1}{2}$$

अतः द्विघात समीकरण के मूल $\frac{2}{3}$ $\frac{-1}{2}$ हैं।

2. गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात करो।

(a) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

हल $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$$\sqrt{2}x^2 + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$x(\sqrt{2}x + 5) + \sqrt{2}(\sqrt{2}x + 5) = 0$$

$$(\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\sqrt{2}x + 5 = 0 \text{ या } x + \sqrt{2} = 0$$

$$x = \frac{-5}{\sqrt{2}} \quad \text{ या } x = -\sqrt{2}$$

अतः हल $x = \frac{-5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

(b) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

हल $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

$$2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0$$

$$2x\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(2x - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$x - \frac{1}{4} = 0 \text{ या } 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ या } \quad x = \frac{1}{4}$$

शेखावाटी मिशन-100

अतः हल $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

3. एक समकोण त्रिभुज की ऊंचाई इसके आधार से 7 cm कम है। यदि कर्ण 13 cm है तो आधार और ऊंचाई ज्ञात करो।

* **द्विघात समीकरण – पूर्ण वर्ग विधि द्वारा हल ज्ञात करना**

क्रियाविधि –

(1) दिए गए द्विघात समीकरण में x^2 के गुणांक का भाग दीजिए।

(2) अचर पद का पक्षान्तरण RHS में करें।

(3) x के गुणांक का आधा करके उसका वर्ग कर दोनों पक्षों में जोड़िये।

(4) दिया गया द्विघात समीकरण $(x \pm A)^2 = K^2$ में बदल जायेगा।

1. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ को पूर्ण वर्ग विधि द्वारा हल करो।

हल दिया गया समीकरण

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

समीकरण को 2 से भाग देने पर

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

x का गुणांक $\frac{5}{2}$, का आधा = $\frac{5}{4}, \frac{5}{4}$ का वर्ग $\frac{25}{16}$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

दोनों पक्षों में वर्गमूल लेने पर

$$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$$

+ चिह्न लेने पर $x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

– चिह्न लेने पर $x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

अतः द्विघात समीकरण के हल $x = \frac{3}{2}, 1$

2. पूर्ण वर्ग विधि द्वारा समीकरण $5x^2 - 6x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात करो।

3. एक क्लास टेस्ट में शेफाली के गणित और अंग्रेजी में प्राप्त किए गए अंकों का योग 30 है। यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिले होते, तो उनके अंको का गुणनफल 210 होता। उसके द्वारा दोनों विषयों में प्राप्त अंक ज्ञात कीजिए।

शेखावाटी मिशन-100

* द्विघात समीकरण – श्रीधराचार्य या द्विघाती सूत्र/द्विघाती सूत्र द्वारा मूल ज्ञात करना।

द्विघात समीकरण – $ax^2 + bx + c = 0$

श्रीधराचार्य या द्विघाती सूत्र

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

* मूलों की प्रकृति – द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति $b^2 - 4ac$ पर निर्भर करती है।

(i) यदि $b^2 - 4ac > 0$ तब मूल वास्तविक तथा भिन्न – भिन्न होंगे।

(ii) यदि $b^2 - 4ac = 0$ तब मूल वास्तविक तथा समान होंगे।

(iii) यदि $b^2 - 4ac < 0$ तब मूल काल्पनिक होंगे। अर्थात् वास्तवि मूल नहीं होंगे।

1. द्विघात समीकरणों के मूल द्विघाती सूत्र द्वारा ज्ञात करो –

(a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

हल यहां a = 2, b = –7, c = 3

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{7 \pm 5}{4}$$

+ लेने पर

$$x = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

– लेने पर

$$x = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

अतः मूल $3, \frac{1}{2}$ हैं।

शेखावाटी मिशन-100

(b) $x-\frac{1}{x}=3$

$x^2-1=3x$

$x^2-3x-1=0$

$a=1, b=-3, c=-1$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$$

+ लेने पर

$$x=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

– लेने पर

$$x=\frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

अतः मूल $x=\frac{3-\sqrt{7}}{2},\frac{3-\sqrt{7}}{2}$

2. दो संख्याओं के वर्गो का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएं ज्ञात करो।

3. मैसूर और बैंगलोर के बीच 132 किमी यात्रा करने में एक एक्सप्रेस रेलगाड़ी, सवारी गाड़ी से 1 घंटा समय कम लेती है। यदि एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल सवारी गाड़ी की औसत चाल से 11 किमी/घंटा अधिक हो, तो दोनों रेलगाड़ियों की औसत चाल ज्ञात करो।

विविध प्रश्न –

1. निम्न में से द्विघात समीकरण है –

(a) $x^2+4x+3=(n+1)^2$ (b) $x+5=0$

(c) $x^2+5x+6=2(n-5)^2$ (d) उपरोक्त सभी Ans (c)

2. द्विघात समीकरण $x^2+4x+3=0$ में $\sqrt{b^2-4ac}$ का मान होगा –

(a) 1 (b) –2

(c) 28 (d) 2 Ans (d)

3. द्विघात समीकरण $2x^2+x-6=0$ के मूल होंगे –

(a) वास्तविक एवं अलग–अलग (b) वास्तविक व समान

(c) काल्पनिक (वास्तविक नहीं) (d) इनमें से कोई नहीं Ans (a)

शेखावाटी मिशन-100

4. K के किस मान के लिये द्विघात समीकरण $Kx^2 + 6x + 3 = 0$ के मूल बराबर होंगे –

(a) 3 (b) –3

(c) 4 (d) –4 Ans (a)

5. k के ऐसे मान ज्ञात करो जिसके लिये द्विघात समीकरण $kx^2 + 6x + 1 = 0$ के मूल वास्तविक एवं भिन्न हो।

6. क्या परिमाप 80 m तथा क्षेत्रफल 400 m^2 का वर्गाकार पार्क संभव है, यदि है तो वर्ग की भुजा ज्ञात करो। (द्विघात समीकरण बनाकर)

7. दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करो।

* **द्विघात समीकरण – मूलों का योग एवं गुणनफल**

द्विघात समीकरण – $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β है, तब

(i) मूलों का योग $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(ii) मूलों का योग $= \alpha.\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

Ex. द्विघात समीकरण $x^2 + 2x + 1 = 0$ के मूलों का योग एवं गुणनफल होगा।

हल माना मूल α व β है तब योग $\alpha + \beta = \dfrac{-2}{1} = -2$ एवं गुणनफल $\alpha.\beta = \dfrac{1}{1} = 1$

* द्विघात समीकरण ज्ञात करना – जब मूलों का योग एवं गुणनफल दिया गया है –

x^2 - (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल = 0

Ex. वह द्विघात समीकरण ज्ञात करो जिसके मूलों का योग एवं गुणनफल क्रमशः –7, 12 हो।

हल द्विघात समीकरण – x^2 - (मूलों का योग) x + गुणनफल = 0

$\Rightarrow x^2 - (-7)x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 7x + 12 = 0$

Ex. द्विघात समीकरण $5x^2 + 13x + k = 0$ का एक मूल दूसरे का व्युत्क्रम हो, तो k का मान ज्ञात करो।

हल माना समीकरण के मूल α व β है, तब

$$\beta = \frac{1}{\alpha}$$

अतः $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ (मूलों का गुणनफल)

$\alpha.\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{k}{5}$ (since $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$)

$$1 = \frac{k}{5}$$

$$k = 5$$

शेखावाटी मिशन-100

Ex. द्विघात समीकरण $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ के मूल वास्तविक एवं बराबर हो तो सिद्ध करो कि $2b+a+c$

हल दिया गया समीकरण

$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$

यहां $A = (b - c), B = (c - a)$, $C = (a - b)$

$D = B^2 - 4AC$

$= (c - a)^2 - 4(b - c)(a - b)$

द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व बराबर है।

अतः $D = 0$

$(c-a)^2 4(b-c)(a-b)=0$

$c^2 + a^2 - 2ca - 4(ba - b^2 + ca + cb) = 0$

$c^2 + a^2 + 4b^2 - 2ca - 4ba + 4ca - 4cb = 0$

$(c + a - 2b)^2 = 0$

$c + a - 2b = 0$

$c + a = 2b$

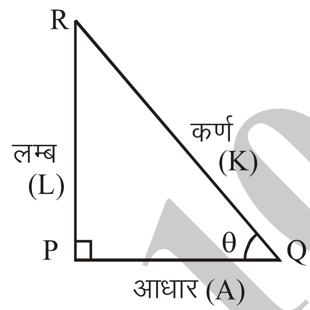
शेखावाटी मिशन-100

Chapter - 8 त्रिकोणमिति का परिचय

अंक भार–12 : प्रश्नों की संख्या–8 (2(1) + 3(1) + 1(1) + 1(1) + 2(1) + 1(1) + 1(1) + 1(1))

* त्रिकोणमितीय अनुपात :– समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों का उसके न्यूनकोणों को सापेक्ष अध्ययन को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते है।

$\frac{LAL}{KKA}$



$\sin\theta = \frac{L}{K}$ $\cot\theta = \frac{A}{L}$

$\cos\theta = \frac{A}{K}$ $\sec\theta = \frac{K}{A}$

$\tan\theta = \frac{L}{A}$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{K}{L}$

* व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय अनुपात –

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta.\operatorname{cosec}\theta = 1$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta.\sec\theta = 1$

$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta.\cot\theta = 1$

* $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

* विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी –

डिग्री रेडियम	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
/ त्रिकोणमितीय अनुपात	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

शेखावाटी मिशन-100

$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\operatorname{cosec}\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

* पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात –

पूरक कोण – वे दो कोण जिनका योग 90^o होता है।

$$\sin(90^o-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^o-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90^o-\theta)=\cot\theta$$
$$\cot(90^o-\theta)=\tan\theta$$
$$\sec(90^o-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$$
$$\operatorname{cosec}(90^o-\theta)=\sec\theta$$

* त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाऐं –

* $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow\sin^2\theta=1-\cos^2\theta,\quad \Rightarrow\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

* $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$

$\Rightarrow\sec^2\theta=1+\tan^2\theta,\quad \Rightarrow\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$

* $\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$

$\Rightarrow\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta,\quad \Rightarrow\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1$

Part - A (भाग–अ)

1. $\tan 45^o+\cot 45^o$ का मान होगा –

(a) 1　　(b) 2

(c) 3　　(d) 0　　Ans (b)

Ans. $\tan 45^o+\cot 45^o$

$= 1 + 1 = 2$

2. $2\sin 45^o.\cos 45^o$ का मान ज्ञात करो –

(a) 1　　(b) 2

(c) 3　　(d) 0　　Ans a)

Ans. $2\sin45^o . \cos45^o$

$= 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{2}=1$

शेखावाटी मिशन-100

3. $\tan^2 60^o$ का मान है –

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) 3 (d) $\frac{1}{3}$ Ans (c)

Ans. $\tan^2 60^o = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\left\{\because \tan 60^o = \sqrt{3}\right\}$

4. यदि $\cos(90^o - \theta) = \frac{1}{2}$ हो तो θ का मान है –

(a) 90º (b) 60º

(c) 45º (d) 30º Ans (d)

Ans. $\cos(90^o - \theta) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin 30^o \Rightarrow \theta = 30^o$

5. $\frac{3\sec 51^o}{\operatorname{cosec} 39^o}$ का मान है –

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0 Ans (c)

Ans. $\frac{3\sec(90^o - 39^o)}{\operatorname{cosec} 39^o} = \frac{3\operatorname{cosec} 39^o}{\operatorname{cosec} 39^o} = 3$

6. $\sin^2 50^o + \cos^2 50^o + 1$ बराबर है –

(a) 2 (b) 1

(c) ½ (d) 0 Ans (a)

Ans. $\sin^2 50^o + \cos^2 50^o + 1$

1 + 1 = 2 $\left\{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right\}$

7. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है –

(a) 1 (b) 8

(c) 9 (d) 0 Ans (c)

Ans. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

$= 9\left[\sec^2 A - \tan^2 A\right] = 9 \times 1 = 9$ $\left\{\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1\right\}$

8. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ और $\cos B = \frac{1}{2}$, तब (A + B) का मान है –

(a) 30º (b) 0º

(c) 60º (d) 90º Ans (d)

शेखावाटी मिशन-100

Ans. $\sin A = \frac{1}{2}$ $\sin B = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin A = \sin 30^\circ$ $\Rightarrow \cos B = \cos 60^\circ$ $\therefore A + B = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow A = 30^\circ$ $\Rightarrow B = 60^\circ$

9. $\cos(90^\circ - 48^\circ)$ का मान है –

(a) $\sin 48^\circ$ (b) $\sec 48^\circ$

(c) $\tan 48^\circ$ (d) $\cot 48^\circ$ Ans (a)

Ans. $\cos(90^\circ - 48^\circ)$

$= \sin 48^\circ$ $\{\because \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta\}$

10. $\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का मान $\theta = 45^\circ$ है –

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) –1 Ans (b)

Ans. $\theta = 45^\circ$ रखने पर –

$= \frac{1-\cos 2\times 45^\circ}{\sin 2\times 45^\circ} = \frac{1-\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{1-0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

* निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिका में लिखिए –

1. $\sin(90^\circ - \theta)$ = ...

Ans. $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

2. यदि $\sin\theta = \cos\theta$ तो $\theta = ...$

Ans. $\sin\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin(90^\circ - \theta)$

$\Rightarrow \theta = 90^\circ - \theta$ $\Rightarrow 2\theta = 90^\circ$, $\Rightarrow 45^\circ$

3. यदि $\tan A = \cot B$, तो A + B का मान .... है।

Ans. tan A = cot B

$\Rightarrow \tan A = \tan(90^\circ - B)$

$\Rightarrow \tan A = \tan(90^\circ - B)$

$\Rightarrow A = 90^\circ - B \Rightarrow A + B = 90^\circ$

4. $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} = ...$

Ans. $= \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$ $\{\because \tan 45^\circ = 1\}$

शेखावाटी मिशन-100

5. $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ =$ ....

Ans. $\cos 48^\circ - \sin(90^\circ - 48^\circ)$

$= \cos 48^\circ - \cos 48^\circ = 0$

6. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$ का मान .... है।

Ans. $= \sec^2\theta(1-\sin^2\theta)$

$= \sec^2\theta \times \cos^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \times \cos^2\theta = 1$

7. यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ हो तो θ का मान .... होगा।

Ans. $= \tan\theta = \sqrt{3}$

$= \tan\theta = \tan 60^\circ$

$= \theta = 60^\circ$

8. यदि $\tan A = 1$ है तो $\sec A$........... होगा –

Ans. $\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$= \sec^2 A = 1 + (1)^2$

$= \sec^2 A = 1 + 1$

$= \sec^2 A = 2$

$= \sec A = \sqrt{2}$

अतिलघुतरात्मक प्रश्न –

1. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$ का मान है –

Ans. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2. $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

Ans. $= \frac{\sin(90^\circ - 72^\circ)}{\cos 72^\circ}$

$= \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1$

शेखावाटी मिशन-100

3. यदि tan 2A = cot (A – 18º), जहां 2A एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए–

Ans. tan 2A = cot (A – 18º)

$\Rightarrow \cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$ $\because \tan\theta = \cot(90^\circ - \theta)$

$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ + 18^\circ = A + 2A$

$\Rightarrow 108 = 3A$

$\Rightarrow A = \frac{108}{36} = 36^\circ$

4. $\sin\theta.\cos(90^\circ - \theta) + \cos\theta\sin(90^\circ - \theta) + 1$ का मान लिखिए –

Ans. $= \sin\theta - \sin\theta + \cos\theta.\cos\theta + 1$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 1$ $\{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\}$

$= 1 + 1 = 2$

5. $\cos^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए –

Ans. $= \cos^2 50^\circ + \cos^2(90^\circ - 50^\circ)$

$= \cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ$ $\{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\}$

$= 1$

6. $\frac{2\tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

Ans. $= \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\left\{\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7. यदि $\tan\theta = \cot\theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए –

Ans. $\tan\theta = \cot\theta$

$\Rightarrow \theta = 90^\circ - \theta$

$\Rightarrow \theta^\circ + \theta^\circ = 90^\circ$ $\Rightarrow 2\theta^\circ = 90^\circ$ $\Rightarrow \theta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

8. त्रिकोणमितीय अनुपात tan A को sec A के पदों में लिखिए –

Ans. $\because \sec^2 - \tan^2 = 1$

$\Rightarrow \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

$\Rightarrow \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

शेखावाटी मिशन-100

9. $\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}}$ का मान लिखिए –

Ans. $= \dfrac{1}{\sqrt{\cot^2\theta}} = \dfrac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$ $\qquad \{\because \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1\}$

10. cot 85º + cos 75º को 0º और 45º के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए–

Ans. cot 85º + cos 75º

= cot (90º – 5º) + cos (90º – 15º)

= tan 5º + sin 15º

Part - B (भाग – ब)

1. यदि $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ और $\tan(A-B)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $0^\circ < A+B \le 90^\circ, A > B$ तो A व B का मान ज्ञात कीजिए–

Ans. $\because \tan(A+B)=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan(A+B)=\tan 60^\circ$

$\Rightarrow A+B=60^\circ$ ... (i)

तथा $\tan(A-B)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow A-B=30^\circ$ ... (ii)

समीकरण (i) व (ii) से –

A + B = 60º

A – B = 30º

$\Rightarrow$ 2A = 90º

$\Rightarrow A = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ समीकरण (i) में रखने पर –

$\Rightarrow$ 45º + B = 60º

$\Rightarrow$ B = 60º – 45º = 15º

2. $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$ का मान है –

Ans. $= \dfrac{5\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{1}$ $\qquad \because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$= 5\times\dfrac{1}{4} + 4\times\dfrac{4}{3} - 1$

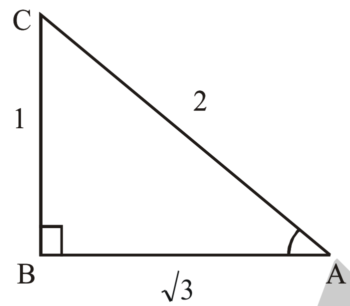
$= \dfrac{5}{4} + \dfrac{16}{3} - \dfrac{1}{1}$

शेखावाटी मिशन-100

$= \dfrac{15+64-12}{12} = \dfrac{67}{12}$

3. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

Ans. sin A cos C + cos A sin C



$\because \tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{L}{A}$

$\Rightarrow L = 1, A = \sqrt{3}, K = ?$

पाइथागोरस प्रमेय से –

d.kZ = आधार^2 + लम्ब^2

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = $(\sqrt{3})^2 + (1)^2$

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 3 +1

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 4

सर्वप्रथम – $\angle A$ के लिए – $A = \sqrt{3}, L = 1, K = 2$

$\sin B = \dfrac{L}{K} = \dfrac{1}{2}, \cos A = \dfrac{A}{K} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

तथा $\angle C$ के लिए – $A = 1, L = \sqrt{3}, K = 2$

$\cos C = \dfrac{A}{K} = \dfrac{1}{2}, \sin C = \dfrac{L}{K} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1+3}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

4. सिद्ध कीजिए –

tan 48º tan 23º tan 42º tan 67º = 1

Ans. LHS = tan 48º tan23º tan (90º – 48º) tan (90º – 23º)

= tan 48º tan 23º cot 48º cot 23º

$= \dfrac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ} \cdot \dfrac{\sin 23^\circ}{\cos 23^\circ} \cdot \dfrac{\cos 48^\circ}{\sin 48^\circ} \cdot \dfrac{\cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}$

= 1

शेखावाटी मिशन-100

5. ΔOPQ में, जिसका कोण P समकोण है, OP = 7 cm और OQ – PQ = 1 cm, sin Q और cos Q के मान ज्ञात कीजिए–

Ans. ΔOPQ में –

पाइथागोरस प्रमेय से –

कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2

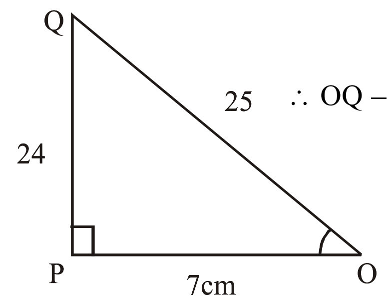
$\Rightarrow OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$\Rightarrow (1 + PQ)^2 = 7^2 + PQ^2$

$\Rightarrow 1 + PQ^2 + 2PQ = 49 + PQ^2$

$\Rightarrow 2PQ = 49–1$

$\Rightarrow 2PQ = 48 \;\Rightarrow PQ = \frac{48}{2} = 24$



$\therefore OQ – PQ = 1 \Rightarrow OQ = 1 + PQ$

$\because OQ = 1 + PQ$

$\Rightarrow OQ = 1 + 24 = 25$

LQ के लिए – A = 24, L = 7, K = 25

$\sin Q = \frac{L}{K} = \frac{7}{25}$

$\cos Q = \frac{A}{K} = \frac{24}{25}$

6. यदि 3cot A = 4, तो $\frac{1-\cos^2 A}{1+\tan^2 A}$ का मान लिखिए –

Ans. 3cot = 4

$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3} = \frac{A}{L}$

यहां A = 4, L = 3, K = ?

पाइथागोरस प्रमेय से –

कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = $4^2 + 3^2$

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 16 + 9

$\Rightarrow$ कर्ण^2 = 25

$\Rightarrow$ कर्ण = 5

$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1-\left(\frac{L}{A}\right)^2}{1+\left(\frac{L}{A}\right)^2} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16-9}{16+9} = \frac{7}{25}$

शेखावाटी मिशन-100

Part - C (भाग–स)

1. $5\frac{\sin 17^o}{\cos 73^o}+2\frac{\cos 67^o}{\sin 23^o}-6\frac{\sin 15^o}{\cos 75^o}$

Ans. $= 5\frac{\sin(90^o-73^o)}{\cos 73^o}+2\frac{\cos(90^o-23^o)}{\sin 23^o}-6\frac{\sin(90^o--75^o)}{\cos 75^o}$

$= 5\frac{\cos 73^o}{\cos 73^o}+2\frac{\sin 23^o}{\sin 23^o}-6\frac{\cos 75^o}{\cos 75^o}$

= 5 + 2 – 6

= 7 – 6 = 1

2. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अन्तः कोण हो, तो दिखाइए कि $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$

Ans. $\because A, B$ और C, ΔABC के अन्तः कोण है।

$\therefore$ A + B + C = 180°

$\Rightarrow$ B + C = 180° – A

$\Rightarrow \frac{B+C}{2}=\frac{180^o-A}{2}$

$\Rightarrow \frac{B+C}{2}=90^o-\frac{A}{2}$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sin\left(90^o-\frac{A}{2}\right)$ $\quad\because \sin(90-\theta)=\cos\theta$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$

3. सिद्ध कीजिए –

$(\sin A+\cos ecA)^2+(\cos A+\sec A)^2=7+\tan^2 A+\cos^2 A$

Ans. LHS लेने पर –

$(\sin A+\cos ecA)^2+(\cos A+\sec A)^2$

$= \sin^2 A+\cos ec^2 A+2.\sin A.\cos ecA+\cos^2 A+\sec^2 A+2.\cos A.\sin A$

$= \sin^2 A+\cos^2 A+2.\sin A.\frac{1}{\sin A}+2.\cos A.\frac{1}{\cos A}+\cos ec^2 A+\sec^2 A$

= 1 + 2 + 2+ cosec² A + sec² A

= 5 + cosec² A + sec² A

= 5 + 1 + cot² A + 1 + tan² A $\quad\{\because \cos ec^2=1+\cot^2 A, \sec^2 A=1+\tan^2 A\}$

= 7 + tan² A + cot² A, RHS

शेखावाटी मिशन-100

4. सिद्ध कीजिए –

$$\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$$

Ans. LHS लेने पर –

$$=\frac{\cos A}{(1+\sin A)}+\frac{(1+\sin A)}{\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{2}{\cos A}=2.\frac{1}{\cos A}=2.\sec A$$ RHS

5. सिद्ध कीजिए –

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sec A+\tan A$$

Ans. LHS लेने पर –

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$$

हर का परिमेयकरण करने पर –

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin A)}{(1-\sin A)}\times\frac{(1+\sin A)}{(1-\sin A)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$$ $\because (a-b)(a+b)=a^2b^2$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}$$

शेखावाटी मिशन-100

$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A + \tan A$ RHS

* अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. सर्वसमिका $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए –

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

2. निम्नलिखित समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए–

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) + x\cos\theta\,\cot(90^\circ - \theta) = \sin(90^\circ - \theta)$$

3. $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

शेखावाटी मिशन-100

Chapter - 2 बहुपद

अंक भार– 5 : प्रश्नों की संख्या – 4 (1(1) + 1(1) + 1(1) + 2(1))

बहुपद की घात (Degree of the polynomials) -

किसी बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद के घातांक को उस बहुपद की घात कहते हैं।

- एक शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य होती हैं।
- शून्य बहुपद की घात अपरिभाषित हैं।

रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) -

घात 1 वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं।

रैखिक बहुपद को $P(x) = ax + b, a \neq b$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

द्विघाती बहुपद (Quadratic Polynomials) -

घात 2 वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहते है।

द्विघाती बहुपद को $P(x) = ax^2 + bx + C, a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

त्रिघाती बहुपद (Cubic Polynimials) -

घात 3 वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहते हैं।

त्रिघाती बहुपद को $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

बहुपद P(x) का x = k पर मान –

यदि P(x), x में कोई बहुपद है और k कोई वास्तविक संख्या है तो P(x) में x को k से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त वास्तविक संख्या बहुपद P(x) का x = k पर मान कहलाता है तथा इसे P(k) द्वारा निरुपित करते हैं।

$P(x) = 8x^2 - 3x + 7$ का $x = 2$ पर मान

$P(2) = 8(2)^2 - 3(2) + 7 = 33$

बहुपद के शून्यक (Zeroes of Polynomial) -

एक वास्तविक संख्या k, बहुपद P(x) का शून्यक कहलाती है। यदि $P(k) = 0$ है।

$P(x) = x - 4$ में $P(4) = 4 - 4 = 0$

अतः 4 बहुपद $x - 4$ का शून्यक है।

- एक शून्यतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं होता है।
- किसी बहुपद P(x) का शून्यक बहुपद समीकरण $P(x) = 0$ का हल अर्थात् इसके मूल (root) होते हैं।
- रैखिक बहुपद $P(x) = ax + b, a \neq 0$ का शून्यक

समीकरण $ax + b = 0$

$$x = \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x \text{ का गुणांक}}$$ होता है।

अतः बहुपद के शून्यक उनके गुणांकों से सम्बन्धित होते है।

- रैखिक बहुपद का एक और केवल एक ही शून्यक होता है।
- द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के अधिकतम दो शून्यक होते है।
- त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के अधिकतम तीन शून्यक होते है।
- n घात के बहुपद P(x) के लिए y = P(x) का ग्राफ x-अक्ष को अधिक से अधिक n बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है। अतः n घात के किसी बहुपद के अधिक से अधिक n शून्यक हो सकते है।

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांको में सम्बन्ध (Relationship between zeroes and coefficients of a polynomial) -

- यदि α तथा β द्विघात बहुपद $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के शून्यक हो तब

शून्यको का योग $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

- इसी प्रकार यदि α, β तथा γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हो तो

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

बहुपदों का गुणनफल –

- यदि P(x) एक या एक से अधिक घात वाला बहुपद हो और a कोई इस प्रकार की वास्तविक संख्या हो कि P(a) = 0 तो (x – a), P(x) का एक गुणनखण्ड होता है।
- द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का गुणनखण्ड करने के लिए b को ऐसी दो संख्याओं के योगफल के रुप में लिखते है जिनका गुणनफल ac हो। इन एक घात गुणनखण्डों को शून्य के बराबर रखकर शून्यक ज्ञात कर सकते है।
- त्रिघाती बहुपद का गुणनखण्ड करने के लिए पहले कम से कम एक गुणनखण्ड ज्ञात करके दूसरा गुणनखण्ड इसका भाग दे के ज्ञात कर लेंगे और प्राप्त दूसरे गुणनखण्ड के मध्य पद विभक्त करके आगे गुणनखण्ड कर सकते है।

बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म (Division Algorithm for Polynomials) -

यदि P(x) और g(x) कोई दो बहुपद है जहां $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद q(x) और r(x) ऐसे प्राप्त कर सकते है कि

$$P(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

जहां r(x) = 0 या r(x) की घात < g(x) की घात है।

शेखावाटी मिशन-100

Sponsored by AAYAAM CAREER ACADEMY, Sikar (Raj.)

निम्न प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चयन कर उत्तर पुस्तिक में लिखिए –

1. निम्न में से कौनसा बहुपद है –

(a) $2\sqrt{x}+5$ (b) $x^{3/2}+x+1$

(c) x^2-4 (d) $\frac{1}{x^2+4x+1}$ Ans (c)

2. निम्न में से कौनसा रैखिक बहुपद है –

(a) $2x^2+4x+2$ (b) $x-2$

(c) $2y^2-3y+4$ (d) x^2-2 Ans (b)

3. घात 2 वाले बहुपद कहलाता है –

(a) रैखिक बहुपद (b) द्विघात बहुपद

(c) त्रिघात बहुपद (d) इनमें से कोई नहीं Ans (b)

4. रैखिक बहुपद ax + b का शून्यक है –

(a) $\frac{a}{b}$ (b) $-\frac{a}{b}$

(c) $\frac{b}{a}$ (d) $-\frac{b}{a}$ Ans (d)

5. बहुपद x^2-3x-4 का $x=1$ पर मान है –

(a) 0 (b) –6

(c) 6 (d) –1 Ans (b)

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. बहुपद $x^2+7x+10$ के शून्यकों का योग और गुणनफल लिखिए।

उ. शून्यकों का योग = $\frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}=\frac{-7}{1}=-7$

शून्यकों का गुणनफल = $\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=\frac{10}{1}=10$

2. बहुपद x^2-3x-4 का $x=-1$ पर मान ज्ञात करो।

उ. $P(x) = x^2 - 3x - 4$

$P(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

3. $2x^2+3x+1$ को $x+2$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

उ. बहुपद x + 2 का शून्यक x = – 2 है।

$\therefore$ शेषफल $= 2(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$= 3$

मिशन-100

4. बहुपद $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणाकों के बीच के संबंध की सत्यता की जांच कीजिए।

उ. $2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6$

$= 2x(x-1) - 2(x-3)$

$= (x-3)(2x-2)$

शून्यकों के लिए

$(x-3)(2x-2) = 0$

$\therefore x - 3 = 0$ या $2x - 2 = 0$

$\therefore$ शून्यक 3 तथा 1 हैं।

शून्यकों का योग $= 3 + 1 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= 3 \times 1 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

5. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 4 और 1 हैं।

उ. माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β हैं।

$\therefore \alpha + \beta = 4 = \frac{-b}{a}$

और $\alpha\beta = 1 = \frac{c}{a}$

$\therefore$ यदि $a = 1$ हो तो $b = -4$ और $c = 1$

$\therefore$ द्विघात बहुपद $x^2 - 4x + 1$

वैकल्पिक हल –

x^2 – (शून्यकों का योगफल)x + शून्यकों का गुणनफल

$= x^2 - (4)\,x + 1$

$= x^2 - 4x + 1$

6. $3x^2 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए।

उ.

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 5 \\ x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ & 3x^2 + 6x^2 + 3x \\ & - \quad - \quad - \\ & \text{---------} \\ & -5x^2 - x + 5 \\ & -5x^2 - 10x - 5 \\ & + \quad + \quad + \\ & \text{---------} \\ & 9x + 10 \end{array}$$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः –3 तथा 2 है।
2. द्विघात बहुपद $3x^2 - x - 4$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जांच कीजिए।
3. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को $x - 1 - x^2$ से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथ्म की सत्यता की जांच कीजिए।
4. बहुपद $x^2 - 2x - 9$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

शेखावाटी मिशन-100

ईकाई – सांख्यिकी

अंक भार– 15

प्रश्नों के अंक भार

वस्तुनिष्ठ – 3 (1)

अति अलघुरात्मक – 1 (1)

अलघुरात्मक – 2 (2)

निबंधात्मक – 4 (1)

दीर्घ उत्तरीय – 3 (1)

समान्तर माध्य $(\overline{X})$

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{आकडों का योग}}{\text{आकडो की संख्या}}$$

(a) व्यक्तिगत श्रेणी का माध्य $= \frac{\sum x_f}{n}$ [n = आंकड़ो की संख्या]

$$\sum X_f = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$$

(b) अवर्गीकृत बटन $\overline{X} = \frac{\sum F_i X_f}{\sum F_r}$

(c) कल्पित माध्य द्वारा $= \overline{X} = a + \frac{\sum F_i d_r}{\sum F_r}$

जहां a = कल्पित माध्य (चर X का माध्य मान)

(d) पद विचलन विधि $= \overline{X} = a + \frac{\sum F_i v_r}{\sum F_r} \times h$

जहां a = कल्पित माध्य

$u_f = \frac{d_i}{h} = \frac{X_f - A}{h}$, h = वर्ग अन्तराल

1. आकड़ें 2, 5, 3, 7, 6, 1 का समान्तर माध्य ज्ञात करो।

उ. $\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{आकडों का योग}}{\text{आकडो की संख्या}}$

$$\overline{X} = \frac{2+3+5+7+6+1}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\overline{X} = 4$$

शेखावाटी मिशन-100

2. निम्न बारम्बारता बंटन का प्रत्यक्ष विधि को समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

चर	2	4	6	8	10
बारम्बारता	1	2	3	2	1

उ.

चर x	बारम्बारता f	$x \times f$
2	1	2
4	2	8
6	3	18
8	2	16
10	1	10
योग	$\sum f = 9$	$\sum xf = 54$

$\therefore$ समान्तर माध्य $= \frac{\sum \times f}{\sum f} = \frac{54}{9}$, $\overline{X} = 6$

3. निम्नलिखित सारिणी एक स्कूल की कक्षा X के 50 विद्यार्थियों के गणित में प्राप्त अंकों को दर्शाती है।

प्राप्तांक	$20-30$	$30-40$	$40-50$	$50-60$	$60-70$	$70-80$
विद्यार्थियों की संख्या	5	9	8	12	13	3

माध्य अंक ज्ञात कीजिए।

उ.

प्राप्तांक वर्ग अन्तराल	बारम्बारता f	मध्य मान (x)	$f \times x$
$20-30$	5	25	125
$30-40$	9	35	315
$40-50$	8	45	360
$50-60$	12	55	660
$60-70$	13	65	845
$70-80$	3	75	225
	$\sum f = 50$		$\sum fx = 2530$

$\therefore$ समान्तर माध्य $= \frac{\sum \times f}{\sum f} = \frac{2530}{50}$, $\overline{X} = 50.6$

4. यदि 5,7,9 X का समान्तर माध्य 9 है तो X का मान ज्ञात करो।

उ. समान्तर माध्य $= \frac{\text{आकडों का योग}}{\text{आकडो की संख्या}}$

$\frac{9}{1} = \frac{5+7+9+X}{4}$

$\Rightarrow 21 + X = 9 \times 4$

$\Rightarrow X = 36 - 21$

$X = 15$

भगवती मिशन-100

5. यदि $X_1, X_2, ... X_n$ का माध्य $\overline{X}$ हो तो $mX_1, mX_2, ...mX_n$ का माध्य ज्ञात करों

उ. अभीष्ट माध्य = $m\overline{X}$

उदाहरण – यदि 5 संख्याओं का माध्य 15 है। प्रत्येक संख्या को 4 से गुणा करने पर नया माध्य क्या होगा।

उ. अभीष्ट माध्य = $15 \times 4 = 60$

6. निम्न बारम्बारता बंटन का कल्पित माध्य से समान्तर माध्य ज्ञात करो।

वर्ग अन्तराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बारम्बारता	7	10	15	8	10

उ.

वर्ग अन्तराल	मध्य मान (X_i)	f_i	$d_i = X_i - A$	$f_i d_i$
0 – 10	5	7	$5 - 25 = -20$	–140
10 – 20	15	10	$15 - 25 = -10$	–100
20 – 30	25	15	$25 - 25 = 0$	0
30 – 40	35	8	$35 - 25 = 10$	80
40 – 50	45	10	$45 - 25 = 20$	200
		$\sum f_i = 50$		$\sum f_i d_i = 40$

कल्पित माध्य = a

चर X के मध्य का मान (a) = 25

समान्तर माध्य = $a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$\overline{X} = 25 + \frac{40}{50}$$

$$\overline{X} = 25 + .8 = 25.8$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. प्रथम पांच पूर्ण संख्याओं का माध्य है?

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4 Ans (b)

2. प्रथम पांच प्राकृत संख्याओं का माध्य है?

(a) 5 (b) 3

(c) 15 (d) 12 Ans (b)

3. A, B, C का गणितीय माध्य निम्नलिखित में से कौन सा होगा –

(a) A + B + C (b) $\frac{ABC}{3}$

शेखावाटी मिशन-100

(c) ABC — (d) $\frac{A+B+C}{3}$ — Ans (d)

4. वर्ग अन्तराल 24-30 का वर्ग चिह्न क्या होगा?
   (a) 16 — (b) 27
   (c) 30 — (d) 24 — Ans (b)

5. बहुलक $Z = 18 + \frac{15-6}{30-6-9} \times 5$ में बहुलक वर्ग की बारम्बारता है –
   (a) 15 — (b) 18
   (c) 6 — (d) 9 — Ans (a)

6. संख्याओं 1, 2, 3, ... n का माध्य है –
   (a) $\frac{n(n+1)}{2}$ — (b) $\frac{n}{2}$
   (c) $\frac{n+1}{2}$ — (d) कोई नहीं — Ans (c)

7. निम्नलिखित में से कौन आलेख द्वारा निर्धारित नहीं किया जा सकता है?
   (a) माध्यक — (b) बहुलक
   (c) माध्य — (d) कोई नहीं — Ans (c)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. यदि निम्न बंटन का माध्य 5 है तो P का मान है –

u	2	4	6	P
f	3	2	1	4

उ.

u	f	uf
2	3	6
4	2	8
6	1	6
P	4	$4P$

माध्य $\overline{X} = \frac{\sum uf}{\sum f}$

$$5 = \frac{6+8+5+4P}{10}$$

$$4P + 20 = 50$$

$$4P = 50 - 20$$

$$P = \frac{30}{4} = 7.5$$

शेखावाटी मिशन-100

2. पांच संख्याओं का औसत 18 है। यदि एक संख्या हटा दी जाती है तो औसत 16 हो जाता है हटाई गई संख्या का मान ... होगा।

उ. हटाई गई संख्या $= 18 \times 5 - 16 \times 4$

$= 90 - 64 = 26$

अभ्यास हेतु –

1. निम्न बारम्बारता बंटन से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	40 – 44	44 – 48	48 – 52	52 – 56	56 – 60	60 – 64
बारम्बारता	5	6	5	9	3	2

माध्यक

व्यक्तिगत श्रेणी का माध्यक –

1. चर X के n पदों की आरोही व अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाये।
2. निम्न सूत्र से माध्यक ज्ञात किया जायेगा –

$$\text{माध्यक} = \begin{cases} \left(\dfrac{n+1}{2}\right)\text{वां पद / मध्य पद, यदि } n \text{ विषम है} \\ \dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)\text{वां पद} + \left(\dfrac{n}{2}+1\right)\text{वां पद}}{2} \text{ / मध्य दो पदों का औसत, यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$$

1. निम्न आंकड़ो का माध्यक ज्ञात करो –

1, 6, 3, 5, 7, 9, 11, 4

उ. आकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 n = 8 सम

$\therefore$ माध्यक $= \dfrac{5+7}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ [उपरोक्त सूत्र के अनुसार]

2. यदि निम्न आकड़े आरोही क्रम में व्यवस्थित है तथा इसका माध्यक 7 है। X का मान ज्ञात करो।

3, 4, 5, X, 8, 9, 10

उ. n = 7 विषम आकड़ें

माध्यक = मध्य पद

7 = 4वां पद

7 = X

शेखावाटी मिशन-100

अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन का माध्यक –

a. संचयी बारम्बारता सारणी बताइये।

b. $\frac{N}{2}=\frac{\sum f}{2}$ ज्ञात कीजिये।

c. $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत चर का मान ही अभीष्ट माध्यम है।

1. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो –

X	5	6	7	8
f	2	3	3	2

उ.

x	f	$c.f$
5	2	2
6	3	5
7	3	8
8	2	10

$\sum f=10$

$\frac{N}{2}=\frac{\sum f}{2}=\frac{10}{2}=5$

5 से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत चर X = 7

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन का माध्यक –

a. संचयी बारम्बारता सारणी बनाइये।

b. $\frac{N}{2}=\frac{\sum f}{2}$ ज्ञात कीजिये।

c. $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत वर्ग माध्यक वर्ग है।

d. माध्यक $M=L+\frac{\frac{N}{2}-c.f}{f}\times h$

L = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा, f = माध्यक वर्ग की बारम्बारता

h = माध्यक वर्ग का अन्तराल, cf = माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारम्बारता

शेखावाटी मिशन-100

1. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो –

वर्ग	$0-10$	$10-20$	$20-30$	$30-40$	$40-50$
बारम्बारता	4	28	42	26	10

उ.

वर्ग	f	$c.f$
$0-10$	4	4
$10-20$	28	32
$20-30$	42	74
$30-40$	26	100
$40-50$	10	110

$\sum f = 110$

$$\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

55 से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता 74 के संगत वर्ग $20-30$

$\therefore$ माध्यक वर्ग $= 20-30$

L = 20, h = 10, f = 42, cf = 32

माध्यक M = $L + \dfrac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$

माध्यक $= 20 + \dfrac{55-32}{42} \times 10$

माध्यक $= 20 + \dfrac{23}{42} \times 10$

माध्यक $= 20 + \dfrac{230}{42}$

माध्यक $= 20 + 5.48$

माध्यक $= 25.48$

बहुलक –

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी बारम्बारता सर्वाधिक होती है, बहुलक कहलाता है।

(a) वर्गीकृत बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग होगा।

1. सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग होगा।

शेखावाटी मिशन-100

2. बहुलक सूत्र $Z = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$

L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा, f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

h = बहुलक वर्ग का अन्तराल, f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग से ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता

उदाहरण – निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात करो –

वर्ग	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
बारम्बारता	6	20	25	13	5

उ. सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग = 30–40

बहुलक सूत्र $= L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$

$L = 30,\ f_1 = 25,\ f_0 = 20,\ f_2 = 13,\ h = 10$

बहुलक $= 30 + \frac{25 - 20}{2 \times 25 - 20 - 13} \times 10$

$= 20 + \frac{5}{50 - 33} \times 10$

$= 30 + \frac{50}{17}$

$= 30 + 2.94$

बहुलक $= 32.94$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. निम्नलिखित बंटन सारणी को एक 'कम प्रकार' के संचयी बारम्बारता बंटन में बदलिए और ग्राफ पेपर पर आलेखित करने वाले सभी बिन्दुओं को लिखिए।

वर्ग	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200
बारम्बारता	12	14	8	6	10

शेखावाटी मिशन-100

उ. से कम प्रकार का संचयी बारम्बारता बंटन

x	संचयी बारम्बारता cf
120 से कम	12
140 से कम	$12+14=26$
160 से कम	$16+8=34$
180 से कम	$34+6=40$
200 से कम	$40+10=50$

आलेखित करने वाले बिन्दुओं

A(120, 12), B (140, 26), C(160, 34), D(180, 40), E(200, 50)

2. निम्नलिखित बंटन सारणी को 'अधिक के प्रकार' के बंटन में बदलिए।

उत्पादन (kg)	$50-55$	$55-60$	$60-65$	$65-70$	$70-75$	$75-80$
फार्मो की संख्या	2	8	12	24	38	16

उ.

उत्पादन	फार्मो की संख्या
50 से अधिक	2
55 से अधिक	8
60 से अधिक	12
65 से अधिक	24
70 से अधिक	38
75 से अधिक	16

1. केन्द्रीय प्रवृति के माप है –

(a) माध्य (b) माध्यक

(c) बहुलक (d) उपरोक्त सभी Ans (d)

2. उस प्रेक्षण का मान जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है –

(a) माध्य (b) माध्यक

(c) बहुलक (d) उपरोक्त सभी Ans (c)

3. कल्पित माध्य विधि से माध्य ज्ञात करने का सूत्र लिखिए –

उ. $\overline{X} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

शेखावाटी मिशन-100

4. प्राप्तांक 7, 3, 5, 12, 10, 9 की माध्यिका है –

(a) 5 (b) 12

(c) 4 (d) 8 Ans (d)

5. 3, 5, 4, 3, 2, 3, 1, 3 का बहुलक है –

(a) 5 (b) 1

(c) 3 (d) 4 Ans (c)

6. बारम्बारता बंटन के मध्य, माध्यक तथा बहुलक के बीच निम्न सम्बंध है –

(a) बहुलक = 3 माध्य – 2 माध्यक (b) बहुलक = 3 माध्यक – 2 माध्य

(c) बहुलक = 2 माध्यक – 3 माध्य (d) बहुलक = 3 माध्यक + 2 माध्य Ans (b)

7. यदि किसी बंटन का माध्य 16 तथा बहुलक 13 हो तो माध्यक ज्ञात कीजिए–

(a) 14 (b) 13

(c) 16 (d) 15 Ans (d)

8. संचयी बारम्बारता सारणी का उपयोग होता है, ज्ञात करने में –

(a) माध्य (b) माध्यक

(c) बहुलक (d) उपरोक्त सभी Ans (b)

अभ्यास हेतु –

1. 2, 3, 4, 5, 6 की माध्यका ज्ञात करो।

2. एक बंटन का माध्य तथा माध्यक क्रमशः 14 और 15 है। अतः बहुलक का मान होगा।

3. निम्न बंटन सारणी का माध्यक ज्ञात करो–

वर्ग	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
बारम्बारता	10	15	12	20	9

4. समान्तर माध्य ज्ञात करो –

x	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
y	8	12	10	11	9

5. निम्न बारम्बारता का बहुलक 36 है। लुप्त बारम्बारता (f) का मान ज्ञात कीजिए –

वर्ग	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
बारम्बारता	8	10	f	16	12	6	7

शेखावाटी मिशन-100

Chapter -7 निर्देशांक ज्यामिति

अंकभार – 6 प्रश्न 4 (1(1) + 1(1) + 3(1) + 1(1) = 6(4))

- किसी बिन्दु P का x – निर्देशांक या भुज x हो और y – निर्देशांक या कोटि y हो तो P के निर्देशांक (x, y) लिखते हैं।
- मूल बिन्दु के निर्देशांक (o, o) होते हैं।
- दो बिन्दुओं के बीच की दूरी – दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \ y_2 - y_1)^2}$$

- मूल बिन्दू (o, o) से किसी बिन्दु (x, y) की दूरी $= \sqrt{x^2 + y^2}$

प्रश्न 1. बिन्दु (3,4) की y –अक्ष से दूरी होगी।

(अ) 1 (ब) 4 (स) 2 (द) 3

उत्तर– (द) 3

प्रश्न 2. बिन्दु $(6, -3)$ की x –अक्ष से दूरी होगी।

(अ) 6 (ब) 3 (स) 2 (द) 5

उत्तर– (ब) 3

x अक्ष से दूरी $= y$ –निर्देशांक का धनात्मक मान $= 3$

प्रश्न 3. बिन्दु (0,3) और $(-2, 0)$ के बीच की दूरी.................................है।

उत्तर– $\sqrt{13}$

प्रश्न 4. बिन्दु (5,7) की कोटि है।

(अ) 5 (ब) –7 (स) 7 (द) –5

उत्तर– (ब) –7

प्रश्न 5 यदि बिन्दु $(x, 3)$ और (5,7) के बीच की दूरी 5 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर– बिन्दु $(x, 3)$ व (5,7) के बीच की दूरी $= 5$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (3-7)^2} = 5$$

$$(x-5)^2 + (-4)^2 = 25$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-2)\ (x-8) = 0$$

$$x = 2,8$$

प्रश्न 6 बिन्दु (3,4) की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

उत्तर– बिन्दु (3,4) की मूल बिन्दु (0,0) से दूरी

$$= \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} \quad = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

प्रश्न 7 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(-2,-1)$, $(-1,1)$, $(5,-2)$ और $(4,-4)$ एक आयत के शीर्ष हैं।

उत्तर– माना दिये गये बिन्दु $A\ (-2,-1)$ $B\ (-1,1), C\ (5,-2)$ और $D\ (4,-4)$ है।

$$AB = \sqrt{[-2-(-1)]^2 + [-1-1]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{[5-(-1)]^2 + [-2-1]^2} = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$$

$$CD = \sqrt{[4-5]^2 + [-4-(-2)]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$DA = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$$

$AB = CD$ और $BC = DA$

अतः सम्मुख भुजाएं बराबर हैं।

विकर्ण $AC = \sqrt{[5-(-2)]^2 + [-2-(-1)]^2} = \sqrt{(7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$

$$BD = \sqrt{[4-(-1)]^2 + [-4-1]^2} = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

अतः विकर्ण बराबर है।

फलतः दिये गए बिन्दु A, B, C, D आयत के शीर्ष है।

प्रश्न 8 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(1,1), (-2,7)$ और $(3,-3)$ सरेख हैं।

उत्तर– माना $A\ (1,1), B\ (-2,7)$ और $C\ (3-3)$ दिए गए बिन्दु हैं।

$$AB = \sqrt{[(-2)-1]^2 + [7-1]^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{[3-(-2)]^2 + [-3-7]^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$CA = \sqrt{[1-3]^2[+[1-(-3)]^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$BC = AB + CA$

अतः बिन्दु A, B व C संरेख है।

प्रश्न 9 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(2, -2), (-2,1)$ और $(5,2)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

उत्तर– माना $A\,(2, -2), B\,(-2,1)$ और $C\,(5,2)$ दिये गये बिन्दु हैं।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AB = \sqrt{[-2-2]^2 + [1-(-2)]^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$BC = \sqrt{[5-(-2)]^2 + [2-1)]^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

$$CA = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$BC^2 = AB^2 + CA^2$$

बौद्धायन प्रमेय से $\Delta\ ABC$ एक समकोण त्रिभुज हैं।

अतः A, B व C एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

प्रश्न 10. x–अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-2, -5)$ और $(2, -3)$ से समदूरस्थ है।

उत्तर– माना x–अक्ष पर स्थित अभिष्ठ बिन्दु $P\,(x, o)$ है जो बिन्दु $A\,(-2, -5)$ और $B\,(2, -3)$ से समान दूरी पर है।

$$PA = PB$$

या $\quad \sqrt{(-2-x)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (-3-0)^2}$

या $\quad (-2-x)^2 + 25 = (2-x)^2 + 9$

या $\quad 4 + x^2 + 4x + 25 = 4 + x^2 - 4x + 9$

या $\quad 4x + 4x = 9 - 25$

या $\quad 8x = -16$

या $\quad x = -2$

x –अक्ष पर वह बिन्दु $(-2, 0)$ होगा।

AAYAAM
CAREER ACADEMY
A NEW DIMENSION OF 'SUCCESS'
NEET | XI & XII FOUNDATION

पंखो को खोल ज़माना सिर्फ उड़ान देखता है

Admission Open
Session 2022-23

NEET

XI & XII
FOUNDATION

Result: NEET 2020

131+ विद्यार्थियों का सरकारी मेडिकल कॉलेज में चयन !

AIR
67

JITENDRA KUMAWAT
S/o SURENDRA KUMAR
PALSANA

MAULANA AZAD GOVT. MEDICAL COLLEGE, DELHI

AIR
197

MANOJ KUMAR
S/o BABU LAL VERMA
PALSANA

AIIMS JDHPUR

Result: NEET 2021

उत्कृष्ट परिणाम के लिए
आयाम
ही सर्वोपरी संस्थान

एक बार फिर आयाम ने साबित की अपनी श्रेष्ठता....

AIR
190
(OBC)

SAKSHAM YADAV
S/O RAJENDRA YADAV
Neem Ka Thana

Result: NEET 2021

सीकर में अनुपात की दृष्टि से सबसे ज्यादा सलेक्शन देने वाला संस्थान!

100+ विद्यार्थियों का सरकारी मेडिकल कॉलेज में चयन संभावित !

AIR **215** (OBC)

RAGHUVEER YADAV
S/o SITA RAM YADAV
Chhapoli, Udaipurwati

AIR **435** (SC)

RAJESH
S/o CHHOTU RAM
Tibbi, Hanumangarh

AIR **470** (OBC)

NISHANT BAGARIA
S/o SAGAR BAGARIA
Malikpur, Khandela

AIR **665** (OBC)

MANISH YADAV
S/o Sh. ARJUN LAL YADAV
Amber, Jaipur

AIR **689** (ST)

POOJA KUMARI
D/o Sh. SHANKAR LAL
Lisadiya, Shrimadhopur

AIR **789** (OBC)

ARJUN YADAV
S/o Sh. GOPAL LAL YADAV
Nathi Ka Bas, Renwal

AIR **828** (SC)

HIMANSHU KUMARI
D/o Sh. RAMESH KUMAR
Singrawat Khurd, Didwana

AIR **902** (OBC)

GAYATRI SIDDH
D/o Sh. SAWANT RAM
Napasar, Bikaner

AIR **940** (OBC)

NEETU
D/o Sh. BHOLA RAM
Mathandi, Shrimadhopur

AIR **1477** (SC)

YASHWANT VERMA
S/o Sh. GANPAT LAL
Kadiya Seema, Rajsamand

AIR **1585** (OBC)

DEVENDRA KUMAR
S/o Sh. RAMAVATAR
Jalpali, Shrimadhopur

AIR **1619** (OBC)

RAVI SAINI
S/o Sh. CHIRANJI LAL SAINI
Thanagazi, Alwar

AIR **1621** (OBC)

ABHAY SINGH
S/o Sh. SAGAR SINGH
Kotri Dhayalan, Reengus

AIR **1841** (GEN.)

DEVISHI SHARMA
D/o Sh. JAIPRAKASH SHARMA
Karad, Dantaramgarh

AIR **1977** (GEN.)

RAHUL SHARMA
S/o Sh.OMPRAKASH
Amber,Jaipur

AIR **2062** (SC)

BABU LAL NAYAK
S/o Sh. TAKA RAM
Pogal, Bikaner

AIR **2144** (GEN.)

RAHUL SHARMA
S/o Sh. NANU RAM SHARMA
Jorpura, Renwal

AIR **2330** (OBC)

SURENDER MOOND
S/o Sh. NARSA RAM
Ranisar, Bikaner

AIR **2338** (OBC)

RISHI YADAV
S/o Sh. SHIVPAL YADAV
Gopalpura, Ajitgarh

AIR **2505** (GEN.)

POOJA SHARMA
D/o SH. PAWAN KUMAR
Sari, Chirawa

AIR **2905** (GEN.)

ARBAZ KHAN
S/o SAMSHER KHAN
Mangloona, Laxmangarh

AIR **3104** (OBC)

OM PRAKASH
S/o Sh. SANWALA RAM
Bhedana, Barmer

AIR **3240** (OBC)

RAHUL KUMAWAT
S/o Sh. BABU LAL KUMAWAT
Alisar, Badi Dhani, Chomu

AIR **3355** (OBC)

ARYAN JANGIR
S/o Sh. SANJAY JANGIR
Udaipurwati, Jhunjhunu

AIR **3381** (OBC)

SAROJ GEELA
D/o Sh. JALU RAM GEELA
Geelon Ki Dhani, Lamiya

AIR **3626** (OBC)

AJAY KUMAR KURI
S/o Sh. GOPAL SINGH
Panawali Dhani, Kasarda

AIR **4228** (OBC)

ROSHAN KUMAR
S/o Sh. MANOHAR LAL
Jharli, Thoi

AIR **4285** (OBC)

SANGHARSH KUMAR
S/o Sh. MURARI LAL SAMOTA
Patwari ka Bas, Shrimadhopur

AIR **4551** (OBC)

RAHUL KUMAR
S/o Sh. SITA RAM YADAV
Mohanpura, Kishangarh, Renwal

AIR **4656** (OBC)

AKASH SERAWAT
S/o Sh. PHOOL CHAND
Nimadi, Hathnoda, Chomu

AIR **4689** (OBC)

ANITA YADAV
D/o Sh. BALU RAM YADAV
Munduru, Shrimadhopur

AIR **4943** (OBC)

VEENA DORATA
D/o Sh. MAHIPAL DORATA
Dumoli Khurd, Khetri

AIR **4951** (OBC)

RAMESH CHOUDHARY
S/o Sh. BAJRANG LAL
Lunkaransar

AIR **5116** (OBC)

ANIL KUMAR SAINI
S/o Sh. SHIMBHU DAYAL
Shyampura Bansur, Alwar

AIR **5467** (OBC)

ASHISH KUMAWAT
S/o Sh. KRISHNA GOPAL
Palsana

AIR **5658** (OBC)

SANTOSH YADAV
S/o Sh. RAMAWATAR YADAV
Sherpura, Khori, Shahpura

AIR **5730** (OBC)

ROSHAN YADAV
S/o Sh. BANSHIDHAR YADAV
Etawa-Bhopji, Chomu

AIR **5945** (OBC)

ANIL CHOUDHARY
S/o Sh. SITARAM
Bilanderpur, Shahpura

हर बार...लगातार...

Highest Selection Ratio

Session 19-20	131 Selection
Session 18-19	129 Selection
Session 17-18	108 Selection

SUCCESS

AAYAAM
CAREER ACADEMY
A NEW DIMENSION OF 'SUCCESS'

NEET | XI & XII FOUNDATION

01572-244555, 7300335555 PIPRALI ROAD, SIKAR

E-mail: info@aayaamacademy.com Website: www.aayaamacademy.com

FOLLOW US ON SOCIAL MEDIA

YouTube — Subscribe to our YouTube Channel AAYAAM ACADEMY, SIKAR

Follow & Like us on Facebook facebook.com/AAYAAMACADEMYSIKAR

Join us on Whatsapp 7300335555